

# UFPA

**PPGEC**

## Universidade Federal do Pará

---



Saymo Wendel de Jesus Peixoto Viana

### **Modelagem dos efeitos dinâmicos em pontes ferroviárias: metodologias analíticas e numéricas**

### **DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

Instituto de Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

Dissertação orientada pelo Professor Dr. Bernardo Nunes de Moraes  
Neto e Dr. Ritermayer Monteiro Teixeira

Belém – Pará – Brasil

2021

**Modelagem dos efeitos dinâmicos em pontes ferroviárias: metodologias  
analíticas e numéricas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil na área de concentração em Estruturas e construção Civil.

Orientador: Dr. Bernardo Nunes de Moraes Neto

Coorientador: Dr. Ritermayer Monteiro Teixeira

Belém-PA

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBDSistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará

Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

V614m Viana, Saymo Wendel de Jesus Peixoto.  
Modelagem dos efeitos dinâmicos em pontes ferroviárias:  
metodologias analíticas e numéricas / SaymoWendel de  
Jesus Peixoto Viana. — 2021.  
97 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Bernardo Nunes de Moraes Neto  
Coorientador(a): Prof. Dr. Ritermayer Monteiro Teixeira  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará,  
Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil, Belém, 2021.

1. pontes ferroviárias. 2. cargas móveis. 3. interação  
veículo-ponte. 4. análise dinâmica.. I. Título.

CDD 624

---

---

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

---



---

**MODELAGEM DOS EFEITOS DINÂMICOS EM PONTES FERROVIÁRIAS:  
METODOLOGIAS ANALÍTICAS E NUMÉRICAS**

---

**AUTOR: SAYMO WENDEL DE JESUS PEIXOTO VIANA**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À BANCA  
EXAMINADORA APROVADA PELO  
COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DO  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ,  
COMO REQUISITO PARA OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRA EM ENGENHARIA CIVIL  
NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM  
ESTRUTURAS E CON

**APROVADO EM: 18 / 03 / 2021.**

**BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. Bernardo Nunes de Moraes Neto  
Orientador (UFPA)

Prof. Dr. Ladislao Roger Ticona Melo  
Membro Externo (UPeU)

Prof. Dr. Ritemayer Monteiro Teixeira  
Membro Externo (UFPA)

Prof. Dr. Dênio Ramam Carvalho de Oliveira  
Membro Interno (UFPA)

**Visto:**

---

Prof. Dr. Marcelo de Sousa Picanço  
Coordenador do PPGEC (UFPA)

---

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço ao Senhor Jesus pela saúde e por ter uma família maravilhosa.

Agradeço imensamente à minha família, especialmente aos meus queridos e amados pais, Elisangela da Silva Peixoto e Francisco das Chagas Pereira Viana, dos quais tenho imenso orgulho e muito amor por sempre estarem disposto a ajudar da melhor forma possível nos momentos difíceis, e aos meus queridos irmãos, Sayna Kellenny, Sarlyson Shelton, Sayla Sheron e Saryra skalet pelo amor, carinho e confiança.

Aos meus avôs, George Peixoto e Maria da Gloria, e aos meus tios e tias em especial, Jeorgiane Peixoto e Lusymary Peixoto, Geordane Vasconcelos, Samuel de Viterbos, Geordan Peixoto e Georginho Peixoto, por sempre me ajudarem em alguns momentos difíceis da graduação e ao longo do mestrado.

Aos meus orientadores Dr. Bernardo Nunes De Moraes Neto e Ritermayer Monteiro Teixeira. Em particular, ao Dr. Ritermayer Monteiro pelas reuniões, paciência, pelos valiosos ensinamentos, deixo aqui minha imensa gratidão.

Aos professores da graduação, Rafael Queiroz, Adelino Valente, Rodrigo Nascimento e Fabricio Cordeiro.

Agradeço ao professor Túlio Nogueira Bittencourt, da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela disponibilidade dos resultados experimentais e ao estudante de mestrado Marcel Almeida do Amaral por sua contribuição em alguns pontos no trabalho.

À CAPES pela bolsa de mestrado, pelo financiamento e auxílio na realização desta pesquisa.

“O cientista não estuda a natureza porque ela é útil; ele a estuda porque ele se encanta com ela, e ele se encanta porque ela é bela. Se a natureza não fosse bela, ela não teria significado para o conhecimento, e se a natureza não tivesse significado para o conhecimento, a vida não teria significado para ser vivida”

Henri Poincaré

## RESUMO

VIANA, S.W.J.P. **Modelagem dos efeitos dinâmicos em pontes ferroviárias: metodologias analíticas e numéricas**. 2021. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) -PPGEC, Universidade Federal Do Pará, Belém, 2021.

O presente trabalho apresenta metodologias analíticas e numéricas para avaliar a resposta dinâmica global de pontes ferroviárias. As modelagens numéricas baseiam-se no desenvolvimento de modelos em elementos finitos, que consideram a ação do veículo, como cargas móveis e também como sistemas acoplados de interação veículo-ponte, desenvolvidos no software ABAQUS™. São apresentados estudos paramétricos para investigar parâmetros da modelagem que interferem no comportamento de pontes ferroviárias, tanto nos modelos com sistema veículo-ponte acoplado, quanto nos modelos baseados na metodologia de cargas móveis. Posteriormente, a resposta estrutural de uma ponte ferroviária em concreto armado existente é obtida via Método da Superposição Modal, por meio de um modelo numérico tridimensional em elementos finitos. O efeito da fissuração, e por consequência, a perda da rigidez à flexão, é considerada indiretamente na modelagem numérica da ponte e as respostas dinâmicas, em termos das histórias de deslocamentos, são comparadas com resultados experimentais, obtidos no monitoramento de curta duração da estrutura. Os resultados previstos pelo modelo mostram satisfatória convergência com as respostas experimentais. O estudo mostrou que o método de penalização da rigidez influencia significativamente na resposta dinâmica e, apesar de se tratar de uma análise linear, que considera a não-linearidade física de forma aproximada, pode ser usada para obter respostas convergentes com baixo custo computacional.

Palavras-chave: pontes ferroviárias; cargas móveis, interação veículo-ponte, análise dinâmica.

## **ABSTRACT**

VIANA, S.W.J.P. **Modeling of dynamic effects on railway bridges: analytical and numerical methods. 2021.** Dissertation (Master in Civil Engineering) - PPGECC, Federal University of Pará, Belém, 2021.

The present work presents analytical and numerical methods to evaluate the global dynamic response of railway bridges. The numerical modeling is based on finite element models, which consider the vehicle's action as moving loads and also as coupled vehicle-bridge interaction systems, developed in the ABAQUS® software. Parametric studies are presented to investigate modeling parameters that govern railway bridge behavior, either in models with a coupled vehicle-bridge system or in models based on moving load methodology. Subsequently, the structural response of an existing reinforced concrete railway bridge is obtained via the Modal Superposition Method, using a finite element three-dimensional numerical model. The cracking stiffness, and consequently loss of flexural stiffness, is considered indirectly in the numerical modeling of the bridge and the dynamic responses, in terms of the displacement histories, they are compared with experimental results, obtained in the short-term monitoring of the structure. The results predicted by the model show a satisfactory convergence with the experimental responses. The study showed that the stiffness penalty method significantly influences the dynamic response and, although it is a linear analysis, which considers physical nonlinearity approximately, it can be used to obtain convergent responses with a low computational cost.

**Keywords:** railway bridges; moving loads, vehicle-bridge interaction, dynamic analysis.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1-Viga simplesmente apoiada solicitada por uma carga pontual .....	25
Figura 2.2-Modelo de cargas móveis proposto por Frýba .....	29
Figura 2.3-Modelação de um conjunto de cargas móveis .....	34
Figura 2.4-Variação da força modal no nó devido a passagem da força .....	40
Figura 2.5-Aplicação das cargas do trem em um conjunto de nós ao longo do percurso .....	41
Figura 2.6-Funções de forças geradas pela ferramenta Bridge Assistant Code (Teixeira,2015) para o nó central de um percurso de 10 m com (a) 11 nós e com (b) 3,5,7 e 11 nós, considerando o veículo Eurostar a 50 Km/h.....	42
Figura 3.1-Modelo de massa suspensa para uma viga simplesmente apoiada .....	43
Figura 3.2-Representação do sistema veículo- ponte como uma sequência de massa suspensas (a) Modelo simplificado para o problema de interação veículo-estrutura(b)	46
Figura 3.3-Modelo de massas suspensas melhorado (a) e Diagrama de corpo livre para o problema (b).....	49
Figura 3.4-Modelo de interação veículo-estrutura considerando o desacoplamento	52
Figura 4.1-Comparação entre os deslocamentos no meio do vão para várias velocidades.....	54
Figura 4.2 -Comparação entre os deslocamentos no meio do vão para os diferentes tipos de análise.....	54
Figura 4.3- Trem Eurostar: Geometria e cargas/eixo.....	55
Figura 4.4-Respostas dinâmicas verticais no meio do vão para o trem Eurostar a 350Km/h .....	55
Figura 4.5-Respostas dinâmicas máximas da ponte em termos de: (a) Aceleração e (b) Deslocamento .....	56
Figura 4.6-Resposta Dinâmica da ponte no ponto central do vão : (a) Deslocamento, (b) Acelerações .....	58
Figura 4.7-Resposta dinâmica para o veículo: a) Deslocamentos, (b) Aceleração ..	58
Figura 4.8-Resposta dinâmica da Ponte no ponto central do vão: a) Deslocamentos, b) Acelerações .....	60
Figura 4.9-Resposta dinâmica para o veículo a) Deslocamentos, (b) Aceleração ...	60

Figura 4.10-Comparação entre os métodos HHT e Newmark para as respostas verticais no meio do vão (a) Deslocamentos; (b) Acelerações .....	61
Figura 4.11-Modelo de veículo com dois eixos e massa suspensa .....	62
Figura 4.12-Respostas dinâmicas:(a) para a seção central da ponte;(b) para o ponto localizado no centroide do veículo .....	63
Figura 4.13-Resposta dinâmica no meio do vão da viga do exemplo 06,considerando diferentes coeficientes de suavização para aceleração .....	65
Figura 4.14-Resposta dinâmicas no meio do vão da viga do exemplo 06,considerando diferentes algoritmos de contato: a) Deslocamentos b) Acelerações .....	66
Figura 4.15-Modelo em sólido do problema do exemplo 05 .....	67
Figura 4.16-Comparação entre os resultados na seção central da viga do exemplo 05,considerando diferentes tipos de elementos: (a) Deslocamentos; (b) Acelerações .....	68
Figura 4.17-Comparação entre as respostas com e sem filtro para as acelerações na seção central da viga do exemplo 05 .....	69
Figura 5.1-Geometria da ponte Suaçuí e detalhes da via .....	71
Figura 5.2-Eschema com parte da instrumentação da ponte sobre o Rio Suaçuí ....	71
Figura 5.3-Dados geométricos do veículo que compõem o trem de minério: (a) Locomotiva DASH-9W; b) Vagão GDE .....	72
Figura 5.4- a) Trem de minério com duas locomotivas e vagões GDE b) Assinatura Dinâmica obtida com base em dados experimentais de carga/roda .....	73
Figura 5.5-Cargas de rodas direita (WL-R) e Esquerdas (WL-L) registradas em campo usadas para o modelo numérico. ....	74
Figura 5.6-Detalhes da modelagem da Via .....	76
Figura 5.7-Modelagem da via: a) Efeito “faca” b) Modelo numérico da via .....	76
Figura 5.8-Vista do modelo em elementos finitos da ponte sobre o rio Suaçuí.....	78
Figura 5.9-Modelos numéricos com inclusão de zonas com concreto em estágio II; a) E-II b) E-I-SV c) E-1 .....	80
Figura 5.10-Zonas consideradas para calibração do modelo numérico a) Propriedades de fissuração da logarina do vão central levantada em campo (face externa);b) Modelo do vão central; (c) Modelo completo .....	81
Figura 5.11- Diagrama momento-curvatura da seção, considerando o módulo de elasticidade tangencial inicial médio para o concreto	
Figura 5.12-Modos globais de vibração e Frequências Naturais do modelo E-II .....	84

Figura 5.13-Modos globais de vibração e frequências do modelo E-II sem a consideração da continuidade da via nas regiões dos encontros .....	85
Figura 5.14-Deslocamentos Verticais no ponto D6: (a) Deslocamentos experimentais e numéricos referentes ao modelo E-II; b) Resultados dos modelos E-I,E-II e experimentais .....	87
Figura 5.15-Deslocamentos obtidos no modelo numérico nos pontos de instalação dos transdutores D6 e D5A a) Ponto do Transdutor D6; b) Ponto do Transdutor D5A ....	88
Figura 5.16-Análise multimodal para os deslocamentos no ponto D6.....	88
Figura 5.17-Deslocamentos simulados no ponto D6 para diferentes módulos transversais do aparelho de apoio .....	90
Figura 5.18-Deslocamentos para diferentes condições de contorno na basa do aparelho de apoio (Nota: entre parêntesis são mostradas os graus de liberdade restringidos,sendo 1 a direção longitudinal, 2 a direção transversal á ponte e 3 a direção vertical ) .....	91

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 5.1-Carregamentos para o veículo ferroviário .....	72
Tabela 5.2-Propiedades mecânicas .....	75
Tabela 5.3-Descrição dos elementos finitos utilizados no modelo .....	77
Tabela 5.4-Valores adotados para o modulo de elasticidade.....	83

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
1.1 JUSTIFICATIVA .....	19
1.2 OBJETIVOS .....	19
<b>2 METODOLOGIAS DE CARGAS MÓVEIS: MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS .....</b>	<b>21</b>
2.1 MODELO DISCRETO: EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO .....	21
2.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO EM MODELOS DISCRETOS .....	22
2.2.1 Integração Implícita: Método de Hilber-Hughes-Taylor (1987) .....	22
2.2.2 Superposição Modal.....	23
2.3 MODELOS CONTÍNUOS: PROBLEMAS FUNDAMENTAIS DE CARGAS MÓVEIS .....	25
2.3.1 Viga simplesmente apoiada solicitada por uma carga móvel .....	25
2.3.2 Viga simplesmente apoiada solicitada por um conjunto de cargas móveis .....	29
2.4 MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DA EXCITAÇÃO EM RESSÔNACIA (DER) ...	32
2.5 MÉTODO DA LINHA DE INFLUÊNCIA RESIDUAL (LIR) .....	37
2.6 METODOLOGIA NUMÉRICA PARA GERAÇÃO DE CARGAS MÓVEIS EM MODELOS DISCRETOS.....	39
<b>3 METODOLOGIA DE INTERAÇÃO VEÍCULO-PONTE: MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS .....</b>	<b>43</b>
3.1 VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOLICITADA POR UMA MASSA SUSPensa MOVENDO-SE COM VELOCIDADE CONSTANTE .....	43
3.2 MODELAGEM DO VEÍCULO COMO UMA SEQUÊNCIA DE MASSAS SUSPENSAS .....	46
3.3 MODELAGEM DO VEÍCULO COM INCLUSÃO DE ELEMENTOS RÍGIDOS ....	48
3.4 METODOLOGIA INTERATIVA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE INTERAÇÃO VEÍCULO-ESTRUTURA CONSIDERADO O DESACOPLAMENTO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO. ....	51
<b>4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL: METODOLOGIAS ANALÍTICAS E NUMÉRICAS.....</b>	<b>53</b>
4.1 EXEMPLO 01: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOLICITADA POR UMA CARGA MÓVEL ISOLADA.....	53
4.2 EXEMPLO 02: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOLICITADA POR UM CONJUNTO DE CARGAS MÓVEIS .....	54

4.3 EXEMPLO 03: METODOLOGIAS DER E LIR.....	56
4.4 EXEMPLO 04: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOLICITADA POR UMA MASSA SUSPensa POR MOLA .....	57
4.5 EXEMPLO 05: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOLICITADA POR UMA MASSA SUSPensa: SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA .....	59
4.6 EXEMPLO 06: MODELAGEM DO VEÍCULO COM DUPLO EIXO.....	62
4.7 INFLUÊNCIA DOS ALGORITMOS DE CONTATO NO PROBLEMA DE INTERAÇÃO VEÍCULO-PONTE .....	64
4.8 COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DINÂMICAS COM ELEMENTOS SÓLIDOS E ELEMENTOS DE VIGA NO PROBLEMA DE INTERAÇÃO VEÍCULO-PONTE ....	66
<b>5 ANÁLISE DINÂMICA DA PONTE SUAÇUÍ.....</b>	<b>70</b>
5.1 DESCRIÇÃO DA PONTE.....	70
5.2 ESTUDO EXPERIMENTAL E PROPRIEDADES MECÂNICAS.....	70
5.3 MODELO NUMÉRICO EM ELEMENTOS FINITOS.....	75
5.4 CONSIDERAÇÃO DA VARIAÇÃO RIGIDEZ À FLEXÃO .....	78
5.5 ANÁLISE MODAL .....	83
5.6 RESPOSTA DINÂMICA VIA SUPERPOSIÇÃO MODAL .....	86
<b>6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>92</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>94</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A norma Brasileira NBR 7188 (ABNT, 2013) estabelece critérios para projetos de pontes de concreto armado e considera a envoltória da resposta estrutural, que superpõe os efeitos estáticos e dinâmicos devido ao tráfego de veículos, por meio de coeficientes de impacto vertical, os quais dependem basicamente do vão da estrutura. Esses coeficientes não levam explicitamente em consideração a geometria, condições de contorno, velocidade e acoplamento da massa do veículo à ponte. Desta forma, compreender os efeitos dinâmicos causados pelo sistema de transporte ferroviário é essencial para avaliar a resposta real da ponte e garantir a integridade estrutural e conforto dos passageiros que utilizam os trens, especialmente para ferrovias de alta velocidade e pontes ferroviárias de transporte pesado.

As ações dinâmicas provocadas pela ação de cargas móveis em pontes ferroviárias podem produzir efeitos significativos na estrutura em decorrência da velocidade do veículo, altas cargas presentes nos vagões, massa do trem, irregularidades da via e efeitos de ressonância decorrente do espaçamento regular entre eixos do veículo. Nesse contexto, uma maneira confiável de avaliar o comportamento real dessas estruturas baseia-se no desenvolvimento de modelos tridimensionais em elementos finitos, cuja calibração é realizada considerando as propriedades do material, fissuração, geometria, velocidade, massa dos veículos, condições de contorno, entre outros aspectos. Em algumas pesquisas, esses efeitos são avaliados através de modelos numéricos tridimensionais validados com base em dados experimentais obtidos por meio de monitoramento em campo (TICONA MELO *et al.*, 2019; MALVEIRO *et al.*, 2018; COSTA *et al.*, 2016; MALVEIRO *et al.*, 2014).

A resposta dinâmica pode ser determinada através das metodologias de cargas móveis ou interação veículo-estrutura. Na metodologia de cargas móveis, a ação do veículo é modelada por intermédio de forças concentradas e desconsidera-se o sistema de suspensão do veículo (amortecedores, molas, inércia rotacional e massa) e irregularidades da via. Esta metodologia tem um baixo custo computacional de processamento e, de acordo com ERRI D214/RP6 (2000), pode apresentar, com relação aos modelos de interação, pequenas diferenças na resposta dinâmica para pontes com vãos superiores a 30 m. Quando a ponte tem massa relativamente grande

comparada à massa do veículo, tal modelo é eficiente para se obter boa precisão na resposta dinâmica. Em oposição à metodologia de cargas móveis, a interação veículo-estrutura considera todas essas variáveis que influenciam na resposta dinâmica da ponte. A solução do problema de interação é obtida considerando o acoplamento entre os subsistemas ponte-veículo, uma vez que as equações do movimento para o problema são resolvidas de forma ora acoplada, ora independente, por meio de métodos numéricos, entre eles, o Método dos Elementos Finitos.

A solução do problema dinâmico considerando o acoplamento dos subsistemas veículo e ponte (BIONDI *et al.*, 2005; YANG *et al.*, 2004) é obtida escrevendo dois conjuntos de equações diferenciais do movimento, um para o veículo e outro para a ponte. O acoplamento ocorre devido às forças de contato presente na interação, as quais variam ao longo do tempo e da posição. Yang *et al.* (2004) resolveram esse problema usando as fórmulas de diferenças finitas da *Newmark*. Outra maneira de resolver as equações do movimento para o problema de interação é a desacoplada, em que é necessário um processo de compatibilização entre os subsistemas ponte e veículo, os quais são modelados separadamente. Esse processo é feito a cada incremento de tempo utilizando métodos iterativos (RIBEIRO, 2012; CALÇADA, 2001; TICONA MELO *et al.*, 2018).

Estudos realizados por Ticona Melo *et al.*, (2018) em pontes ferroviárias sobre cargas de eixo pesado, utilizando metodologia de carga móveis e interação veículo-estrutura considerando ou não as irregularidades da via para trens com velocidades abaixo da velocidade de ressonância, mostram que a metodologia de cargas móveis apresenta resultados praticamente coincidentes com o modelo de interação, para os deslocamentos globais da ponte avaliada. Os autores mostraram que as pequenas diferenças, com relação à resposta dinâmica dos modelos que consideram o efeito de interação, é decorrente da passagem dos vagões e estão associadas à presença das forças inércias. Já para as acelerações, foram verificadas diferenças significativas nos resultados gerados pelas diferentes metodologias. Uma justificativa para essa diferença é que o modelo de cargas móveis não considera a massa suspensa dos veículos.

Os efeitos das irregularidades da via contribuem para aumentar um pouco os deslocamentos e acelerações. No entanto, as irregularidades da via têm pouca influência na resposta dinâmica para trens de baixa velocidade, sendo que seu efeito



é mais significativo para velocidades próximas às de ressonância. (YANG *et al.*, 2004; TICONA MELO *et al.*, 2018; MAJKA; HARTNETT, 2009).

Para as acelerações presentes no tabuleiro, a comissão de especialistas ERRI D214/RP6 (2000) delimita um valor de aceleração vertical limite para garantir a estabilidade das vias. Este não deve ser superiores a 0.7g isso para frequências entre 2.2 Hz a 60 Hz. Uma proposta alternativa elaborada pelo comitê EN-1991 (2003), atendendo não só a aceleração vertical, mas a resistência lateral da via, delimita os valores de aceleração equivalente à 0.55g para vias com lastro e 0.75g para pontes com vias fixas no tabuleiro.

O critério estabelecido pela comissão de especialista ERRI D214/RP6 (2000), admite um fator de segurança igual a dois, deste modo, pode-se limitar a aceleração vertical no tabuleiro para vias com lastro a  $3.5 \text{ m/s}^2$  e via sem lastro  $5 \text{ m/s}^2$  para frequências até 30 Hz. Devido ao fator de segurança, o presente critério é considerando como estado limite de serviço. O critério descrito está associado aos níveis de aceleração vertical no tabuleiro, tal fenômeno pode causar estabilidade da camada de lastro, podendo levar a perda da instabilidade lateral da via.

Em relação aos parâmetros que influenciam na resposta dinâmica, Liu *et al.* (2009) mostrou que, quando a relação entre as frequências naturais do veículo e da ponte é menor que um, a resposta dinâmica pode ser estimada utilizando a metodologia de cargas móveis. Quando a frequência natural da ponte é muito menor comparada com a do veículo, a resposta dinâmica da ponte, em termos de velocidades de ressonância, alcança seu valor mínimo quando a interação veículo-estrutura é considerada. No estudo supracitado, também foi apresentado que é importante considerar a interação veículo-estrutura quando a relação entre a massa do veículo e a massa da ponte for relativamente alta. Quando essa relação é pequena, pode-se assumir que o modelo de carga móvel gera resultados aceitáveis. Observa-se também que o aumento do amortecimento reduz o efeito de interação entre os subsistemas e, conseqüentemente, a resposta dinâmica da ponte.

## **1.1 JUSTIFICATIVA**

As pontes ferroviárias são estruturas sujeitas a cargas de alta intensidade que variam de posição a cada intervalo de tempo. Compreender os efeitos dinâmicos presentes nessas estruturas é importante para direcionar estratégias de gerenciamento do ciclo de vida e garantir a vida útil de pontes existentes ou conduzir o adequado dimensionamento dos elementos estruturais em novos projetos.

A ação presente nessas estruturas tem, de fato, um caráter dinâmico. Portanto, atuam esforços que variam com o tempo devido às vibrações causadas pelo veículo. Essas solicitações podem ser superiores às geradas em uma análise estática. Deste modo, é essencial compreender a natureza das ações aplicadas na ponte e os efeitos por elas gerados. As deformações, acelerações e demais respostas da estrutura precisam ser monitoradas com a finalidade de garantir, além da segurança estrutural, o conforto dos passageiros, estabilidade da via e contato roda-trilho. Além disso, as influências das não linearidades presentes no material, velocidade de ressonância, perda de rigidez a flexão por fissuração do concreto e aceleração vertical no tabuleiro também devem ser investigadas.

Nesse contexto, a apresentação, descrição e aplicação de diferentes metodologias de análise é importante para investigar os principais parâmetros que afetam o comportamento dinâmico de pontes ferroviárias tanto para trens de alta velocidade e como para trens de baixa velocidade em ferrovias de transporte pesado de cargas.

## **1.2 OBJETIVOS**

O objetivo geral deste trabalho é apresentar e aplicar metodologias analíticas, por meio de formulações matemáticas existentes na literatura, e numéricas, baseadas no Método dos Elementos Finitos, para modelagem e investigação do comportamento de pontes ferroviárias para trens de alta velocidade e para trens de baixa velocidade, estes últimos, em ferrovias caracterizadas pelo transporte de cargas pesadas.

Para tanto, os objetivos específicos são:

- a) Demonstrar formulações para metodologias analíticas de cargas móveis, massa suspensa e metodologias de cálculo simplificadas, válidas para trens de alta velocidade (Métodos da Decomposição da Excitação e Ressonância e Método da Linha de Influência Residual). Neste caso, a finalidade é compreender os conceitos físicos presente em análise dinâmica de pontes;
- b) Apresentar as equações do movimento considerando um sistema acoplado para modelos de massas suspensas e elementos rígidos no problema de interação veículo estrutura;
- c) Aplicar as diferentes metodologias, validando-as por meio de exemplos, alguns deles desenvolvidos por meio de modelos em elementos finitos;
- d) Realizar a análise dinâmica de uma ponte ferroviária de concreto armado existente, por meio de um modelo numérico tridimensional em elementos finitos desenvolvido utilizando o código ABAQUS®. Neste caso, pretende-se investigar o comportamento dinâmico utilizando-se a metodologia de cargas móveis;
- e) Validar, com base em dados experimentais de monitoramento, o modelo numérico da ponte tomada como estudo de caso e investigar o efeito da perda da rigidez à flexão, considerada indiretamente na modelagem, nas histórias de deflexões da estrutura.

## 2 METODOLOGIAS DE CARGAS MÓVEIS: MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS

### 2.1 MODELO DISCRETO: EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO

De acordo com Clough e Penzien (2003), o sistema de equações de equilíbrio dinâmico para um sistema discreto de  $n$  graus de liberdade, submetido a vibrações forçadas com amortecimento, apresenta a relação entre o vetor de forças de inércia  $\mathbf{F}_i(t)$ , o vetor de forças elásticas  $\mathbf{F}_k(t)$ , o vetor de força de amortecimento  $\mathbf{F}_c(t)$  e o vetor de forças externas  $\mathbf{F}(t)$ , conforme a seguinte expressão:

$$\mathbf{F}_i(t) + \mathbf{F}_k(t) + \mathbf{F}_c(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

As forças elásticas são dadas por  $\mathbf{F}_k(t) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(t)$ , onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez e  $\mathbf{u}(t)$  o vetor deslocamento. As forças de amortecimento são dadas por  $\mathbf{F}_c(t) = \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}(t)$ , sendo  $\mathbf{C}$  a matriz com os coeficientes de amortecimento e  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  é vetor das velocidades. As forças de inércia são determinadas por  $\mathbf{F}_i(t) = \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}(t)$ , onde  $\mathbf{M}$  é a matriz das massas e  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  é o vetor das acelerações. O vetor das forças externas nodais, definidas em função do tempo, é dado por  $\mathbf{F}(t)$ . Rescrevendo a equação (2.1) têm-se o seguinte sistema matricial de equações diferenciais:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.2)$$

Para a construção da matriz  $\mathbf{C}$ , pode-se utilizar a hipótese de amortecimento clássico de *Rayleigh*, que expressa uma combinação linear entre as matrizes de rigidez e massa conforme a equação:

$$\mathbf{C} = c_1 \cdot \mathbf{M} + c_2 \cdot \mathbf{K} \quad (2.3)$$

Os valores de  $c_1$  e  $c_2$  são constantes que podem ser determinadas conhecendo-se duas frequências naturais da estrutura, de acordo com a seguinte expressão (CLOUGH; PENZIEN, 2003):

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \frac{2\omega_m\omega_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \begin{bmatrix} \omega_n & \omega_m \\ -1 & -1 \\ \omega_n & \omega_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

onde,  $\omega_n$  e  $\omega_m$  são, respectivamente, as frequências naturais angulares correspondentes ao  $n$ -ésimo e  $m$ -ésimo modos de vibração, sendo  $\xi_m$  e  $\xi_n$  os coeficientes de amortecimento associados aos respectivos modos de vibração.

## 2.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO DINÂMICO EM MODELOS DISCRETOS

### 2.2.1 Integração Implícita: Método de Hilber-Hughes-Taylor (1987)

É um algoritmo de integração direta implícita incondicionalmente estável, que resolve problemas dinâmicos com caráter linear e não-linear. Este método admite uma dissipação numérica dos modos de vibração de altas frequências, ao mesmo tempo em que permite que os modos inferiores não sejam afetados com grande intensidade pelo processo incremental de integração, proporcionando uma adequada representação para a resposta dinâmica. Isso ocorre porque, ao adotar um incremento de tempo  $\Delta t$  fixo, as frequências elevadas podem ser mal integradas, introduzindo assim ruídos espúrios que precisam ser dissipados nas respostas da estrutura. O sistema acoplado de equações diferenciais de equilíbrio dinâmico para o presente método pode ser expresso por (HUGHES,1987):

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + (1+\alpha)\mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + (1+\alpha)\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_{t+\Delta t} = (1+\alpha)\mathbf{F}_{t+\Delta t} - \alpha \cdot \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \alpha \cdot \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}_t + \alpha \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_t \quad (2.5)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro que controla a dissipação numérica. Os vetores de deslocamentos,  $\mathbf{U}$ , e velocidades,  $\dot{\mathbf{U}}$ , são estimados pelas seguintes equações incrementais:

$$\mathbf{U}_{t+\Delta t} = \mathbf{U}_{t+\Delta t}^* + \Delta t^2 \cdot \beta \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \quad (2.6)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^* + \Delta t^2 \cdot \gamma \cdot \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{t+\Delta t}^* \\ \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_t + \Delta t \cdot \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t^2 \cdot (\frac{1}{2} - \beta) \ddot{\mathbf{U}}_t \\ \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \cdot (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_t \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A fim de que se possa garantir a estabilidade incondicional e eficiência máxima, são definidos os parâmetros  $\alpha$ ,  $\gamma$  e  $\beta$  com o objetivo de assegurar a precisão da

solução, onde  $\beta = 1/4 \cdot (1 - \alpha^2)$ ,  $\gamma = 1/2 - \alpha$  e  $-1/3 \leq \alpha \leq 0$  (HUGHES, 1987). Os valores  $\alpha = -0,1$ ,  $\beta = 0,3025$  e  $\gamma = 0,6$  podem ser usados como referência.

Com o objetivo garantir uma adequada representação dos primeiros modos de vibração, onde as frequências naturais são essenciais para a previsão do comportamento do modelo estrutural da ponte sob determinada solicitação externa. O incremento de tempo  $\Delta t$  pode ser estimado de acordo com EERI D214/RP9 (2001) e Ribeiro (2004), da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{1}{8f_{máx}} \quad (2.9)$$

$$\Delta t = \frac{L}{4nv_{máx}} \quad (2.10)$$

onde,  $f_{máx}$  é a frequência de vibração mais alta a ser considerada na análise,  $L$  é o vão da ponte,  $v_{máx}$  velocidade máxima do veículo e  $n$  é o número de modos de vibração suficientes para representar determinada resposta dinâmica de interesse.

### 2.2.2 Superposição Modal

Este método de análise tem como finalidade transformar um conjunto de  $n$  equações diferenciais do movimento simultâneas em um conjunto de  $n$  equações de coordenadas normais generalizadas independentes desacopladas. Portanto, a resposta dinâmica pode ser obtida resolvendo separadamente para cada coordenada modal (CLOUGH; PENZIEN, 2003).

O procedimento a fim de obter as respostas em termos de deslocamentos, aceleração e velocidade, para uma estrutura com comportamento linear excitada por uma força de caráter dinâmico é descrito a seguir.

Inicialmente, determinam-se as frequências naturais e a partir destas, os modos de vibração mediante a análise modal, conforme a equação (2.11), a qual representa um problema algébrico de autovalor e autovetor (*eigen problem*).

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \cdot \mathbf{M}) \cdot \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

Na equação (2.11),  $\omega_n^2$  representam os autovalores do problema, sendo  $\omega_n$  a  $n$ -ésima frequência natural angular do sistema, e  $\phi_n$  representa o  $n$ -ésimo autovetor. Os autovetores formam uma base ortogonal e também são denominados de modos naturais de vibração da estrutura. Posteriormente, conhecendo-se a solicitação que atua na estrutura, pode-se escrever a equação do movimento para o problema e, em seguida, determinar os carregamentos modais, massas modais e amortecimentos modais generalizados, para cada modo de vibração, conforme as seguintes equações:

$$f_n(t) = \phi_n^T \cdot \mathbf{F}(t) \quad (2.12)$$

$$m_n = \phi_n^T \cdot \mathbf{M} \cdot \phi_n \quad (2.13)$$

$$k_n = \phi_n^T \cdot \mathbf{K} \cdot \phi_n \quad (2.14)$$

$$c_n = \phi_n^T \cdot \mathbf{C} \cdot \phi_n \quad (2.15)$$

As equações (2.12) a (2.15) são obtidas usando as condições de ortogonalidades entre os modos de vibração em relação a matriz de massa, rigidez e amortecimento de *Rayleigh*. Considerando a taxa de amortecimento modal conforme a equação (2.16), o sistema de equações diferenciais desacopladas, expresso em coordenadas generalizadas,  $y_n$ , equivalentes a um sistema de um grau de liberdade para cada modo, pode ser determinado conforme equação (2.17).

$$c_n = 2 \cdot \xi_n \cdot \sqrt{m_n \cdot k_n} = 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot m_n \quad (2.16)$$

$$\ddot{y}_n(t) + 2 \cdot \xi_n \cdot \omega_n \cdot \dot{y}_n(t) + \omega_n^2 \cdot y_n(t) = \frac{f_n(t)}{m_n} \quad (2.17)$$

Finalmente, os vetores de aceleração, velocidades e deslocamentos, em termo de coordenadas gerais,  $u(t)$ , podem ser determinados por meio das seguintes equações, onde N representa os números de modos de vibrações considerados na superposição:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}(t) &= \sum_{n=1}^N \ddot{y}_n(t) \cdot \phi_n \\ \dot{\mathbf{u}}(t) &= \sum_{n=1}^N \dot{y}_n(t) \cdot \phi_n \\ \mathbf{u}(t) &= \sum_{n=1}^N y_n(t) \cdot \phi_n \end{aligned} \quad (2.18)$$

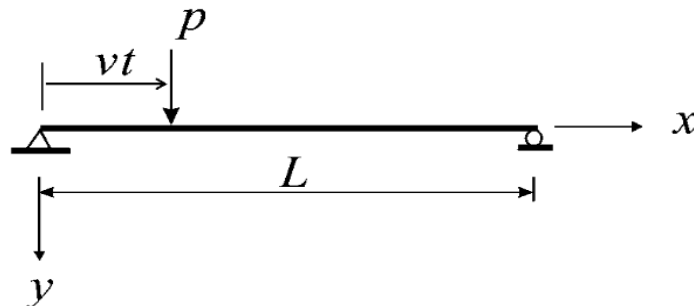
## 2.3 MODELOS CONTÍNUOS: PROBLEMAS FUNDAMENTAIS DE CARGAS MÓVEIS

### 2.3.1 Viga simplesmente apoiada solicitada por uma carga móvel

A solução analítica clássica para uma viga isostática simplesmente apoiada com uma carga móvel,  $p$ , movendo com velocidade constante,  $v$ , sem a consideração das irregularidades da via, pode ser encontrada nos trabalhos de Yang *et al.*, (2004); Frýba (1972); Biggs (1964) e Xia *et al.*(2018).

A solução considera a hipótese de Euler-Bernoulli para vigas e que a carga móvel passa ao longo da ponte uma única vez com movimento uniforme. O amortecimento da ponte é tipo *Rayleigh* e não leva em conta a interação veículo-estrutura (YANG *et al.*, 2004). A Figura 2.1 ilustra o problema descrito.

Figura 2.1- Viga simplesmente apoiada solicitada por uma carga pontual



Fonte: Yang *et al.*, (2004)

Adotando as hipóteses descritas anteriormente, a equação do movimento para o problema é uma equação diferencial parcial de 4ª ordem escrita da seguinte forma (YANG *et al.*,2004):

$$m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + c_e \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + I c_i \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \begin{cases} p \delta(x-vt) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{L}{v} \\ 0 & \text{se } t > \frac{L}{v} \end{cases} \quad (2.19)$$

onde  $L$  é o vão da viga,  $c_i$  é amortecimento interno,  $c_e$  amortecimento externo,  $EI$  e  $m$  são a rigidez à flexão e a massa por unidade de comprimento da ponte, respectivamente. A representação da carga sobre a viga está no segundo membro da



equação (2.19), onde a função delta de Dirac,  $\delta$ , é aplicada com a finalidade de localizar a posição da carga no percurso percorrido à medida que o tempo muda. As condições de contorno descritas para o problema são dadas por:

$$\begin{aligned}
 u(0,t) &= 0 \\
 u(L,t) &= 0 \\
 EI \cdot u''(0,t) &= 0 \\
 EI \cdot u''(L,t) &= 0 \\
 u(x,0) &= 0 \\
 \dot{u}(x,0) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Admitindo que as deflexões da estrutura correspondem ao produto do  $n$ -ésimo modo de vibração da ponte pela coordenada generalizada deste modo, têm-se:

$$u(x,t) = \phi_n(x)q_n(t) \tag{2.21}$$

Sendo  $\phi_n(x)$  a função que representa o  $n$ -ésimo modo de vibração e  $q_n(t)$  a coordenada generalizada correspondente. Substituindo  $u(x,t)$  na equação (2.19) e multiplicando ambos os membros por  $\phi_n(x)$  e integrando a equação em todo o comprimento da ponte, no caso, de 0 a  $L$  obtém-se:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ m(t) \int_0^L [\phi_n(x)]^2 dx \right\} \ddot{q}_n(t) + \left\{ c_e \left( \int_0^L [\phi_n(x)]^2 dx \right) + I c_i \left( \int_0^L \frac{\partial^4 \phi_n(x)}{\partial x^4} dx \right) \right\} \dot{q}_n(t) + \\
 &+ \left\{ EI \int_0^L \frac{\partial^4 \phi_n(x)}{\partial x^4} \phi_n(x) dx \right\} q_n(t) = p \phi_n(vt)
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Destaca-se que a equação (2.22) é obtida aplicando a propriedade de filtragem da função Delta de Dirac:  $\int_0^L \delta(x-vt) \phi_n(x) dx = \phi_n(vt)$ . Definindo-se a frequência natural de vibração ( $\omega_n^2$ ) como a relação entre rigidez generalizada a flexão ( $K^*$ ) e a massa ( $M^*$ ) generalizada (CHOPRA, 2001; CLOUGH; PENZIEN, 2003), sendo  $c_e = \alpha_e m$  e  $c_i = \alpha_i E$  os coeficientes de amortecimento externo e interno, respectivamente, para o  $n$ -ésimo modo de vibração, tem-se as seguintes relações:

$$\omega_n^2 = \frac{K^*}{M^*} = \frac{EI}{m} \frac{\int_0^L \frac{\partial^4 \phi_n(x)}{\partial x^4} \phi_n(x) dx}{\int_0^L [\phi_n(x)]^2 dx} \quad (2.23)$$

$$\xi_n = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_e}{\omega_n} + \alpha_i \omega_n \right) \quad (2.24)$$

Efetuada algumas manipulações algébricas e substituído as equações (2.23) e (2.24) na equação (2.22), obtém-se a seguinte equação do movimento para o  $n$ -ésimo modo de vibração, em termos de coordenadas generalizadas e forças generalizadas que atuam na ponte (YANG *et al.*, 2004):

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{p\phi_n(vt)}{m \int_0^L [\phi_n(x)]^2 dx} \quad (2.25)$$

Admitindo-se que o  $n$ -ésimo modo de vibração,  $\phi_n(x)$ , para a viga simplesmente apoiada é uma função senoidal conforme a equação (2.26), a qual satisfaz as condições de contorno expressas em (2.20), a  $n$ -ésima frequência de vibração da estrutura ( $\omega_n$ ) é obtida substituindo  $\phi_n(x)$  na equação (2.23). Resolvendo-se as integrais da equação (2.23), obtém-se a equação (2.27), a qual permite estimar as frequências naturais de flexão da estrutura.:

$$\phi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.26)$$

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (2.27)$$

Substituindo (2.26) em (2.25), obtém-se a equação diferencial equilíbrio dinâmico em termos de coordenadas generalizadas, da seguinte forma

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{2P}{ml} \sin \frac{n\pi vt}{L} \quad (2.28)$$

A solução geral da equação diferencial (2.28) é dada pela combinação linear de solução complementar e uma solução particular (CHOPRA, 2001; CLOUGH; PENZIEN, 2003;). Como resultado, têm-se:

$$q_n = \left( \frac{2PL^3}{n^4 \pi^4 EI} \frac{1}{(1 - S_n^2)^2 + 4(\xi_n S_n)^2} \right) \left\{ (1 - S_n^2) \sin \Omega_n t - 2\xi_n S_n \cos \Omega_n t + e^{-\xi_n \omega_n t} \left[ 2\xi_n S_n \cos \omega_{dn} t + \frac{S_n}{\sqrt{(1 - \xi_n^2)}} (2\xi_n + S_n^2 - 1) \sin \omega_{dn} t \right] \right\} \quad (2.30)$$

onde  $\omega_{dn}$  é frequência amortecida da ponte,  $\Omega_n$  é a frequência de excitação causada pela carga móvel,  $S_n$  é definida como a razão entre a frequência de excitação da carga e frequência natural angular. Os parâmetros supracitados podem ser determinados conforme as seguintes equações:

$$\omega_{dn} = \omega_n \sqrt{1 - \xi_n^2} \quad (2.31)$$

$$\Omega_n = \frac{n\pi v}{L} \quad (2.32)$$

$$S_n = \frac{\Omega_n}{\omega_n} = \frac{n\pi v}{\omega_n L} \quad (2.33)$$

A equação que representa o deslocamento vertical causado pela carga móvel, movendo-se com velocidade constante, considerando o efeito do amortecimento pode ser obtida a partir da combinação linear de todos os modos de vibração, conforme estabelece o Método da Superposição Modal. Tal procedimento é expresso na equação (2.34), a seguir:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \phi_n(x) \quad (2.34)$$

Desprezando o efeito do amortecimento, o deslocamento vertical devido à carga móvel sobre a ponte é dado por:

$$u(x, t) = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi x}{L} \left( \frac{\sin \Omega_n t - S_n \sin \omega_n t}{(1 - S_n^2)} \right) \quad (2.35)$$

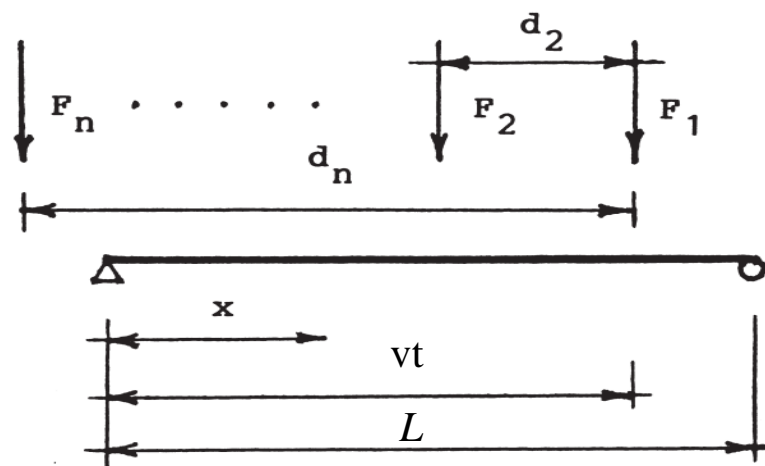
As soluções apresentadas para a resposta dinâmica com o efeito do amortecimento são válidas para situações em que a massa do veículo é

suficientemente pequena comparada com a massa da ponte e não considera a interação veículo-estrutura (YANG *et al.*, 2005).

### 2.3.2 Viga simplesmente apoiada solicitada por um conjunto de cargas móveis

Na seção anterior foi apresentada uma solução analítica para a modelo carga móvel considerado apenas uma única força pontual movendo-se em movimento uniforme. Nesta seção, será mostrada uma solução matemática desenvolvida por Frýba (2001), em uma viga isostática simplesmente apoiada submetida a um conjunto de forças pontuais movendo-se em velocidade constante, conforme ilustrado na Figura 2.2.

Figura 2.1-Modelo de cargas móveis proposto por Frýba



Fonte: adaptado de Frýba (2001)

Considerando a viga isostática de comprimento  $L$  solicitada por um conjunto de cargas móveis,  $F_i$ , onde  $i = 1, 2, 3, \dots$  é o número de forças por eixo movendo-se em movimento uniforme. A equação diferencial parcial de 4º ordem para o problema pode ser escrita como:

$$m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2m\omega_d \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = \sum_{i=1}^i \varepsilon_i(t) \delta(x - x_i) F_i \quad (2.36)$$

onde,  $u(x,t)$  representa o deslocamento vertical da viga no ponto  $x_i$  para um período de tempo  $t_i$ ;  $\delta$  é a função Delta de Dirac;  $EI$  é a rigidez à flexão da viga;  $m$  massa

por unidade de comprimento da viga;  $\omega_d$  é frequência amortecida ;  $F_i$  descreve as forças que atuam por eixo e o termo  $\varepsilon_i(t)$  é obtido conforme a equação abaixo:.

$$\varepsilon_i(t) = h(t - t_i) - h(t - T_i) \quad (2.37)$$

onde  $h(\cdot)$  é a função de *Heaviside (unit step function)*, a qual é 0 para argumentos negativos e 1 para argumentos positivos. Com base na função  $h(\cdot)$ , pode-se definir o intervalo de tempo em que a força começa atuar sobre a viga ( $t_i$ ) e o instante de tempo referente ao período em que a força deixa a estrutura ( $T_i$ ) causando grandes amplitudes de vibração, dado pelas equações (2.38) e (2.39) respectivamente (FRYBA,2001).

$$t_i = \frac{x_i}{v} \quad (2.38)$$

$$T_i = \frac{L + d_i}{v} \quad (2.39)$$

A posição  $x_i$  da força para um certo instante de tempo e velocidade é dada por:

$$x_i = vt - d_i \quad (2.40)$$

sendo  $d_i$  a distância da primeira força pontual até a última força que atua sobre a ponte. Considerando as condições de contorno definidas na equação (2.20) para a viga simplesmente apoiada, as frequências naturais  $\omega_j$  e  $f_j$ , para cada modo de vibração  $\phi_j(x)$ , são dadas respectivamente pelas equações (2.41), (2.42) e (2.43) (FRYBA,2001), para  $j = 1, 2, 3, \dots$

$$\omega_j^2 = \frac{j^4 \pi^4 EI}{L^4 m} \quad (2.41)$$

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi} \quad (2.42)$$

$$\phi_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (2.43)$$

A resposta dinâmica para o problema pode ser obtida utilizando o Método da Superposição Modal com transformada de *Fourier* e de *Laplace-Carson* (FRYBA,2001). Logo, têm-se:

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^i u_0 \frac{F_i}{F} j \omega \omega_1^2 \left[ f(t-t_i) h(t-t_i) - (-1)^j f(t-T_i) h(t-T_i) \right] \phi_j(x) \quad (2.44)$$

sendo,

$$f(t) = \frac{1}{\omega' D} \left[ \frac{\omega'_j}{j \omega} \sin(j \omega t + \lambda_1) e^{-\omega_d t} + \sin(\omega' t + \lambda_2) \right] \quad (2.45)$$

$$D^2 = (\Omega_j^2 - j^2 \omega^2) + 4 j^2 \omega^2 \omega_d^2 \quad (2.46)$$

$$\lambda_1 = \arctg \left( \frac{-2 j \omega \omega_d}{\Omega_j^2 - j^2 \omega^2} \right) \quad (2.47)$$

$$\lambda_2 = \arctg \left( \frac{2 \omega_d \omega'_j}{\omega_d^2 - \omega_j'^2 + j^2 \omega^2} \right) \quad (2.48)$$

$$\omega = \frac{\pi v}{L} \quad (2.49)$$

$$\Omega_j^2 = \omega_j'^2 + \omega_d^2 \quad (2.50)$$

$$u_0 \approx \frac{FL^3}{48EI} \quad (2.51)$$

O parâmetro  $\omega$  é frequência de carregamento relativo à velocidade do trem;  $\omega_d$  é dado pelo produto do amortecimento da viga por sua primeira frequência angular;  $u_0$  é deflexão vertical no ponto médio da viga para uma força  $F$ ,  $\omega_j$  é frequência angular correspondente ao modo  $j$  e  $\omega_j'^2$  dado pela expressão  $\omega_j'^2 = \omega_j^2 - \omega_d^2 - 2i\omega_d\omega_j$ . A resposta dinâmica em função da aceleração é obtida derivado duas vezes a equação (2.52). Logo, têm-se:

$$\ddot{u}(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^i u_0 \frac{F_i}{F} j \omega \omega_1^2 \left[ \ddot{f}(t-t_i) h(t-t_i) - (-1)^j \ddot{f}(t-T_i) h(t-T_i) \right] \phi(x)_j \quad (2.52)$$

onde,

$$\ddot{f}(t) = -\frac{\omega_j'^2 - \omega_d^2}{\omega'_j D} \left[ \frac{j \omega \omega'_j}{\omega_j'^2 - \omega_d^2} \sin(j \omega t + \lambda_1) e^{-\omega_d t} + \sin(\omega'_j t + \lambda_3) \right] \quad (2.53)$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 + \arctg \left( \frac{2 \omega_d \omega'_j}{\omega_j'^2 - \omega_d^2} \right) \quad (2.54)$$

A solução proposta por Frýba (2001) considera um conjunto de cargas móveis se movendo em velocidade constante separadas pelas distâncias entre eixos do veículo. Considera também a contribuição dos modos de vibração mais significativos para a resposta dinâmica da estrutura.

Na análise dinâmica de pontes ferroviárias, a resposta em ressonância ocorre em função do intervalo de tempo entre passagem dos eixos sobre um ponto na ponte, numa certa frequência. Quando a frequência dos eixos, ou múltiplo desta coincidir com a frequência natural da estrutura, ocorrerá o fenômeno de ressonância (YANG *et al.*, 1997). Portanto, têm-se:

$$v_{cr} = \frac{f_n d'}{k}, \quad k = n = 1, 2, 3... \quad (2.55)$$

onde  $n$  é o número de modos,  $v_{cr}$  é a velocidade crítica de ressonância,  $f_n$  corresponde à frequência natural da ponte e  $d'$  é a distância característica das cargas por eixo.

## 2.4 MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DA EXCITAÇÃO EM RESSÔNACIA (DER)

Nesta seção, será demonstrada uma metodologia analítica simplificada para análise dinâmica de pontes isostáticas simplesmente apoiada solicitadas por um conjunto de cargas móveis, onde a resposta dinâmica máxima da ponte, em termos de aceleração no meio do vão, é obtida considerando somente o primeiro modo vibração da ponte e os termos em ressonância da série da força de excitação decomposta em Série de Fourier. Esta metodologia é descrita no *Report 9* (RP9) desenvolvido pela comissão de especialistas D214 do ERRI (ERRI D214/RP9, 2000; ERRI D214/RP9, 2001). Também se encontra nas pesquisas de Ribeiro (2004) e Barbero (2001).

Admitindo as hipóteses da teoria de vigas de *Euler-Bernoulli*, considerando a passagem do veículo constituído por um conjunto de cargas móveis pontuais sobre a viga simplesmente apoiada com vão  $L$ , amortecimento  $c$ , rigidez à flexão  $EI$  e massa por unidade de comprimento  $m$ , sendo a viga um sistema contínuo, pode-se escrever, a seguinte equação do movimento:

$$m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = F(x,t) \quad (2.56)$$

onde  $F(x,t)$  representa a função de força distribuída por unidade de comprimento da viga. A configuração deformada para o primeiro modo de vibração,  $\phi(x)$ , considerando um sistema de coordenadas com abscissa  $x$  com origem na seção central do vão, pode ser determinada conforme a seguinte equação:

$$\phi(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (2.57)$$

A hipótese estabelecida, a qual considera a configuração deformada da viga aproximada somente com base no seu primeiro modo de vibração,  $\phi(x)$ , reduz o problema a um sistema de um grau de liberdade equivalente. Admitindo que as deflexões da estrutura correspondem ao produto do primeiro modo de vibração da ponte pela coordenada generalizada deste modo,  $q(t)$ , obtém-se a seguinte equação:

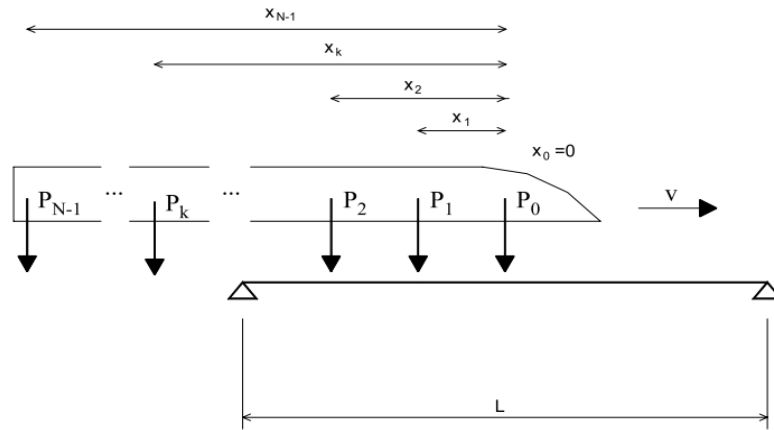
$$\ddot{q}(t) + 2\xi\omega_0\dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = \frac{F^*(t)}{M^*} \quad (2.58)$$

onde  $M^* = \int_{-L/2}^{L/2} m\phi(x)dx = mL/2$  é a massa modal generalizada;

$F^*(t) = \int_{-L/2}^{L/2} F(x,t)\phi(x)dx$  é a força modal generalizada e  $\omega_0$  é a frequência associada ao primeiro modo, a qual pode ser calculada de acordo com a equação (2.27), fazendo-se  $n = 1$ . A solução para a equação (2.58) consiste na combinação linear da solução particular com a solução homogênea. (CHOPRA, 2001; CLOUGH; PENZIEN, 2003). Com a finalidade de se obter a solução particular para o problema, considera-se o veículo formado por  $N$  cargas pontuais movendo com velocidade constante, onde a carga  $P_i$  está a uma distância  $x_i$  da carga inicial  $P_0$ , conforme a Figura 2.3.



Figura 2.2-Modelação de um conjunto de cargas móveis



Fonte: Ribeiro (2004)

Conforme descrito na seção 2.3.2, a função do carregamento pode ser obtida utilizando as propriedades da função delta de Dirac, fazendo-se  $F(x,t) = \sum_{i=0}^{N-1} P_i \delta(x - v(t - t_i)) \prod(t - t_i)$ , onde  $\prod(t - t_i)$  é a função de *Heaviside*, semelhantemente ao procedimento adotado na dedução da equação (2.36). Dessa forma, aplicando a propriedade de filtragem da função  $\delta$ , a força generalizada do sistema pode ser obtida

$$F^*(t) = \int_{-L/2}^{L/2} F(x,t) \phi(x) dx = \int_{-L/2}^{L/2} \sum_{i=0}^{N-1} P_i \delta(x - v(t - t_i)) \prod(t - t_i) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$F^*(t) = \sum_{i=0}^{N-1} P_i \prod(t - t_i) \cos\left(\frac{\pi v(t - t_i)}{L}\right) \quad (2.59)$$

onde,  $t_i$  é o tempo percorrido pela carga  $P_i$  até o vão central, e  $T$  é o tempo necessário para as cargas percorrerem toda a ponte como mostra as seguintes equações:

$$t_i = \frac{x_i}{v} \quad (2.60)$$

$$T = \frac{L}{v} \quad (2.61)$$

A excitação que representa a passagem do veículo na ponte é aperiódica. Mas, a resposta dinâmica pode ser obtida de forma aproximada considerando a excitação como uma função harmônica de período  $T$ , sendo  $T$  o tempo necessário para o veículo passa sobre a ponte. Portanto, a força generalizada  $F^*(t)$  pode ser expressa em termos de série de Fourier:

$$F^*(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (2.62)$$

sendo  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  e os coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  da série são gerados com base na função da equação (2.59), de acordo com as equações abaixo:

$$a_0 = \frac{2L}{\pi(L + x_{N-1})} \sum_{i=0}^{N-1} P_i \quad (2.63)$$

$$a_n = \frac{4L}{\pi(L + x_{N-1})} \frac{\frac{c \cos(Ln\omega)}{2v}}{\left(\frac{1 - Ln\omega}{\pi v}\right)} \sum_{i=0}^{N-1} P_i \cos(n\omega t_i) \quad (2.64)$$

$$b_n = \frac{4L}{\pi(L + x_{N-1})} \left( \frac{\frac{c \cos(Ln\omega)}{2v}}{\left(\frac{1 - Ln\omega}{\pi v}\right)} \right) \sum_{i=0}^{N-1} P_i \sin(n\omega t_i) \quad (2.65)$$

Portanto, a solução do problema dinâmico em termos de deslocamento e aceleração na seção central do vão da ponte é dada pela solução particular, obtida através da série de Fourier, e pela solução homogênea associada às vibrações livres.

Admitindo-se as condições iniciais de deslocamento  $u(t=0)$  e velocidade  $\dot{u}(t=0)$ , e considerando que somente os termos da Série de Fourier que satisfazem o critério de ressonância contribuem para o cálculo da resposta estrutural, pode-se obter a equação (2.67) para estimar as acelerações verticais máximas no meio do vão. O critério de ressonância é imposto ao introduzir a razão  $r_n$  na dedução, conforme equação (2.66). A resposta dinâmica máxima representada na equação (2.67) pode ser expressa por um produto de três termos com significados físicos distintos.

$$r_n = \frac{n\omega}{\omega_0} = 1 \quad (2.66)$$

$$\ddot{u}_{\max} = \phi(0) \cdot \ddot{q}_{\max} = 1 \cdot C_t \cdot A\left(\frac{L}{\lambda}\right) \cdot G(\lambda) \quad (2.67)$$

onde,  $C_t$  é uma constante;  $A\left(\frac{L}{\lambda}\right)$  é uma função de ponderação ou linha de influência,

que depende do comprimento de onda característico da excitação,  $\lambda = \frac{v}{n_0}$ ;  $G(\lambda)$  é

termo que reflete a excitação do veículo e a resposta da ponte em ressonância. Tal

termo é denominado de espectro do veículo e depende do parâmetro  $\lambda$ . As equações (2.68) a (2.70), as quais descrevem cada termo do produto de (2.67), são apresentadas abaixo:

$$C_i = \frac{4}{m\pi} \quad (2.68)$$

$$A\left(\frac{L}{\lambda}\right) = \left| \frac{\cos(\pi L/\lambda)}{\left(\frac{2L}{\lambda}\right) - 1} \right| \quad (2.69)$$

$$G(\lambda) = \frac{L}{\xi(L + x_n - 1)} \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} P_i \cos\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} P_i \sin\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right)^2} \left(1 - e^{-2\pi\xi \frac{x_{n-1}+L}{\lambda}}\right) \quad (2.70)$$

A resposta dinâmica máxima pode ser obtida considerando que ela não necessariamente ocorre depois que todas as cargas atravessam a ponte. Dessa forma, pode-se obter a resposta máxima quando parte do trem está sobre a estrutura. Nesse caso, é como se um trem formado por um número menor de eixos pudesse gerar a resposta crítica. A fim de considerar essa hipótese, pode-se introduzir o conceito de sub-trens, onde se levam em conta todos comboios formados por  $i$  eixos, sendo  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . A função  $G(\lambda)$  pode ser reescrita, então, admitindo a envoltória dos espectros de cada sub-trem, conforme expresso na equação (2.71). Ressalta-se que, para eliminar o vão  $L$  da equação (2.71), faz-se  $L/\xi(L + x_n - 1) \approx 1/\xi x_i$ , o que equivale admitir que a dimensão total do trem é muito superior ao comprimento da estrutura.

$$G(\lambda) = \text{MAX}_{(i=1, N-1)} \frac{1}{\xi x_i} \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} P_i \cos\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} P_i \sin\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right)^2} \left(1 - e^{-2\pi\xi \frac{x_{n-1}}{\lambda}}\right) \quad (2.71)$$

O deslocamento vertical máximo na seção central do vão devido à passagem do veículo é dado pela expressão (2.72), onde  $u_{\max}^*$  corresponde ao deslocamento estático máximo na mesma seção.

$$u_{\max} = u_{\max}^* + \frac{\ddot{u}_{\max}}{\omega_0^2} \quad (2.72)$$

A partir da expressão (2.71) pode-se obter a resposta do trem na ponte dependendo apenas das características do veículo (cargas por eixo e distância entre eixos), já que o amortecimento estrutural é uma característica da ponte. Sendo assim, aplicando-se o limite na equação (2.71) em que o amortecimento  $\xi$  tende a zero, obtém-se o espectro do trem em função das propriedades do trem.

$$S(\lambda) = \text{MAX}_{(i=1, N-1)} \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} P_i \cos\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} P_i \sin\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right)^2} \quad (2.73)$$

A equação (2.73) representa a assinatura dinâmica do trem, ou seja, fisicamente decompõe um carregamento aperiódico em uma função que depende do comprimento de onda  $\lambda$  da excitação, o qual modela o efeito dos espaçamentos variáveis associados às forças que cruzam a ponte. Portanto, a assinatura dinâmica do trem representa as características de excitação dinâmica de um trem específico (ERRI D214/RP9, 2001). Como visto, tais efeitos são descritos na equação (2.71), resultante da aplicação da série de Fourier à força externa gerada pelo conjunto de cargas sobre a ponte.

Desta forma, pode-se estimar a velocidade de ressonância e frequência de excitação do trem através do comprimento de onda da excitação,  $\lambda$ . Utilizando a equação (2.55), a qual define  $\lambda = d' / k$ , e atribuindo  $f_n$  como a primeira frequência natural da ponte, a velocidade de ressonância pode ser estimada fazendo-se  $v_{cr} = f_n \lambda$

## 2.5 MÉTODO DA LINHA DE INFLUÊNCIA RESIDUAL (LIR)

A Linha de Influência Residual representa a resposta da estrutural quando uma carga concentrada isolada deixa a ponte. Dessa forma, esse método baseia-se no comportamento em vibração livre que ocorre em uma estrutura isostática após a etapa de vibração forçada gerada pela carga. A resposta estrutural total, nesse sentido, pode ser determinada pela superposição das linhas de influências residuais defasadas no tempo e geradas pelas várias cargas que compõem o trem (ERRI D214/RP9, 2000; ERRI D214/RP9, 2001; RIBEIRO, 2004; BARBERO, 2001).

Considerando uma viga isostática simplesmente apoiada com vão  $L$ , rigidez a flexão  $EI$ , frequência natural  $\omega_0$ , onde atua um conjunto de cargas pontuais com velocidade constante, a resposta dinâmica pelo método LIR pode ser obtida considerando instantes de tempo compreendidos em dois intervalos, o primeiro em vibração forçada e o segundo em vibração livre ( $0 \leq t \leq L/v$  e  $t > L/v$ ).

Considerando a contribuição de cada parcela associada às  $N$  cargas do trem, como mostrado na Figura 3, e a defasagem temporal,  $t_i = x_i / v$ , de cada carga  $P_i$ , obtêm-se as seguintes equações para os deslocamentos e acelerações máximas no meio do vão da estrutura (BARBERO, 2001), admitindo o instante de tempo em que a última carga abandona a ponte:

$$u_{m\acute{a}x} = \frac{r}{1-r^2} \frac{1}{M\omega_0^2} \sqrt{e^{-2\xi\frac{\pi}{r}} + 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)e^{-\xi\frac{\pi}{r}} \times \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{N-1} \left(P_i \cos\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right) e^{-2\pi\xi\frac{x_i}{\lambda}}\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \left(P_i \sin\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right) e^{-2\pi\xi\frac{x_i}{\lambda}}\right)^2\right)}} \quad (2.74)$$

$$\ddot{u}_{m\acute{a}x} = \frac{r}{1-r^2} \frac{1}{M} \sqrt{e^{-2\xi\frac{\pi}{r}} + 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)e^{-\xi\frac{\pi}{r}} \times \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{N-1} \left(P_i \cos\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right) e^{-2\pi\xi\frac{x_i}{\lambda}}\right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \left(P_i \sin\left(\frac{2\pi x_i}{\lambda}\right) e^{-2\pi\xi\frac{x_i}{\lambda}}\right)^2\right)}} \quad (2.75)$$

As equações (2.74) e (2.75) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$u_{m\acute{a}x} = C_{desl} A(r) G(\lambda) \quad (2.76)$$

$$\ddot{u}_{m\acute{a}x} = C_{acel} A(r) G(\lambda) \quad (2.77)$$

onde,  $C_{desl}$ ,  $C_{acel}$  e  $r$  são constantes dadas nas equações (2.77), (2.78) e (2.79);  $A(r)$  representa o fator da resposta dinâmica da ponte dado na equação (2.80); e  $G(\lambda)$  é espectro do trem, já apresentado na equação (2.71). Ressalta-se que o espectro  $G(\lambda)$  expresso na equação (2.81) já considera o efeitos dos sub-trens discutido no Método DER, uma vez que a resposta máxima pode ocorrer quando parte do veículo passa pela ponte.

$$C_{desl} = \frac{1}{M\omega_0^2} \quad (2.78)$$

$$C_{acel} = \frac{1}{M} \quad (2.79)$$

$$r = \frac{\lambda}{2L} \quad (2.80)$$

$$A(r) = \frac{r}{1-r^2} \sqrt{e^{-\frac{2\xi\pi}{r}} + 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)e^{-\frac{\xi\pi}{r}}} \quad (2.81)$$

$$G(\lambda) = MÁX_{(N-1;i=1)} \sqrt{\left( \sum_{i=0}^{N-1} \left( P_i \cos\left(\frac{2\pi(x_1 - x_i)}{\lambda}\right) e^{-2\pi\xi\frac{x_1 - x_i}{\lambda}} \right)^2 + \sum_{i=0}^{N-1} \left( P_i \sin\left(\frac{2\pi(x_1 - x_i)}{\lambda}\right) e^{-2\pi\xi\frac{x_1 - x_i}{\lambda}} \right)^2 \right)} \quad (2.82)$$

## 2.6 METODOLOGIA NUMÉRICA PARA GERAÇÃO DE CARGAS MÓVEIS EM MODELOS DISCRETOS

Este método considera ação do veículo sobre a ponte como um conjunto de forças concentradas movendo-se com intensidade e velocidade constantes na posição de cada eixo do veículo. Conforme já discutido, o modelo de cargas pontuais não leva em consideração as forças de inércia e, por consequência, a interação veículo- estrutura. Sendo assim, esta metodologia não é eficiente quando se desejar avaliar o conforto dos passageiros, estabilidade roda-trilho, efeitos das irregularidades da via (RIBEIRO, 2004). No entanto, o modelo de cargas móveis apresenta o baixo custo computacional comparado às metodologias de interação veículo-ponte e resposta similares podem ser obtidas para os deslocamentos em pontes com vãos  $L > 30m$  (ERRI D214/RP6, 2000). Para pontes que apresentam baixa relação entre a massa do veículo e massa da estrutura por unidade de comprimento, o modelo de carga móvel é eficiente (LIU *et al.*, 2009).

De acordo com Ribeiro (2004), para aplicação do método ao problema de análise dinâmica em modelos matemáticos discretos, é preciso definir funções de forças temporais nos nós específicos no sentido do movimento das forças, em cada instante de tempo  $t$ . O valor da função representa a força nodal das cargas pontuais que passam sobre a ponte.

A princípio, é preciso definir quais nos serão considerados na passagem das cargas móveis. Em seguida, é necessário especificar para o instante inicial  $t_0$  e a posição  $x_k(t_0)$  da carga  $P_k$  em relação ao ponto inicial. Dado um instante de tempo  $t$ ,

a posição da carga neste instante é definida como  $x_k(t)$  e é dada pela soma da posição inicial  $x_k(t_0)$  e o espaço percorrido pela carga, de acordo com a equação:

$$x_{k(t)} = x_k(t_0) + vt \quad (2.83)$$

Conhecendo-se a posição da carga no instante  $t$ , as forças nodais equivalentes às cargas pontuais podem ser obtidas conforme à seguinte expressão:

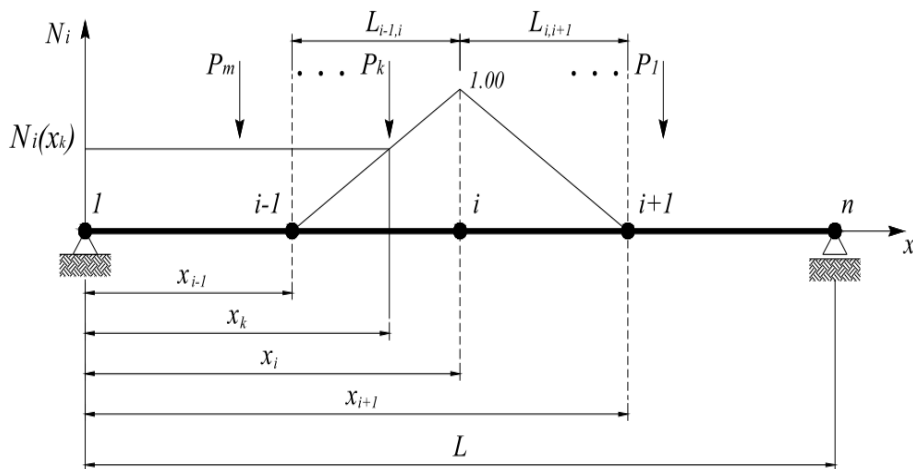
$$F_i(t) = \sum_{k=1}^m P_k N_i(x_k(t)) \quad (2.84)$$

sendo que  $F_i(t)$  simboliza as forças nodais equivalentes;  $P_k$  denota as forças concentradas/eixo e  $N_i(x_k)$  indica a função de forma (interpolação) para o  $i$ -ésimo nó ao longo do percurso. As funções de interpolação podem ser obtidas de acordo com a seguinte equação:

$$N_i(x_k) = \begin{cases} \frac{x_k - x_{i-1}}{L_{i-1,i}} \Leftarrow x_{i-1} \leq x_k \leq x_i \\ 1 - \frac{x_k - x_i}{L_{i,i+1}}, \Leftarrow x_i \leq x_k \leq x_{i+1} \end{cases} \quad (2.85)$$

onde  $L_{i-1,i}$  e  $L_{i,i+1}$  são as distâncias entre os nós  $i-1$  e  $i$  e entre os nós  $i$  e  $i+1$ , de acordo com a Figura 2.4.

Figura 2.3-Variação da força modal no nó devido a passagem da força

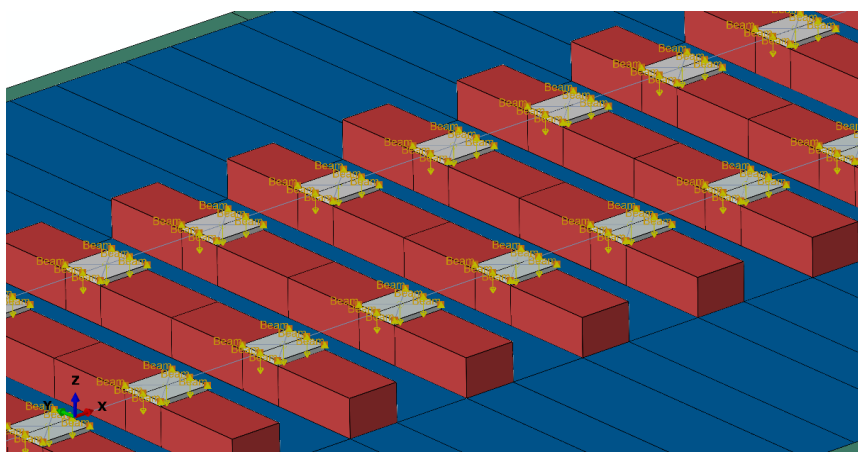


Fonte: Ribeiro (2004)

Neste trabalho, o método descrito anteriormente foi implementado no *software* de elementos finitos ABAQUS™ utilizando o código *Bridge Assistant Code* desenvolvido por Teixeira (2014), já que o mesmo não possui um algoritmo para geração automática de cargas móveis no modelo numérico. O código assistente utiliza o *software* MATLAB™ (MATHWORKS, 2014) para geração e atribuição automática das funções temporais de forças para os nós de cada percurso no modelo em elementos finitos, bastando o usuário definir a composição ferroviária a partir de uma biblioteca de locomotivas e vagões. Os valores das forças concentradas podem, inclusive, aqueles resultantes de medidas experimentais, por meio de pesagem em movimento (*Weigh-in-Motion*).

No *software* ABAQUS™, é definida a geometria da estrutura, condições de contorno, a malha e interações de contato entre os componentes que constituem o modelo numérico, além de um conjunto de nós para a aplicação das cargas pontuais, como mostrado na Figura 2.5. No MATLAB™, são geradas as funções de amplitudes que serão aplicadas no conjunto de nós do percurso.

Figura 2.4-Aplicação das cargas do trem em um conjunto de nós ao longo do percurso.

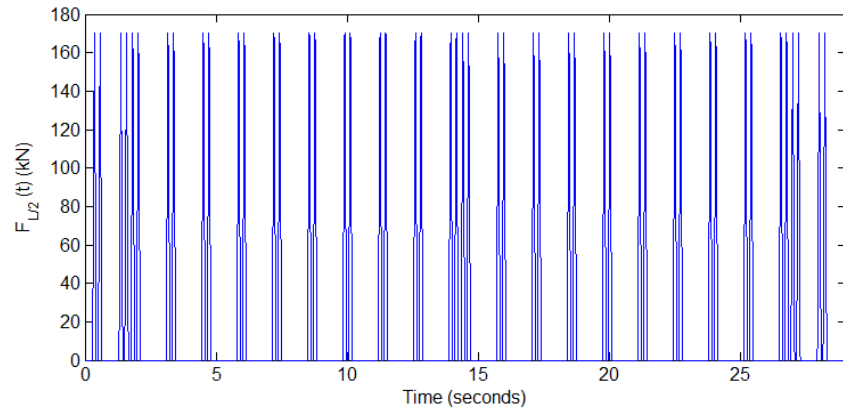


Fonte: O autor

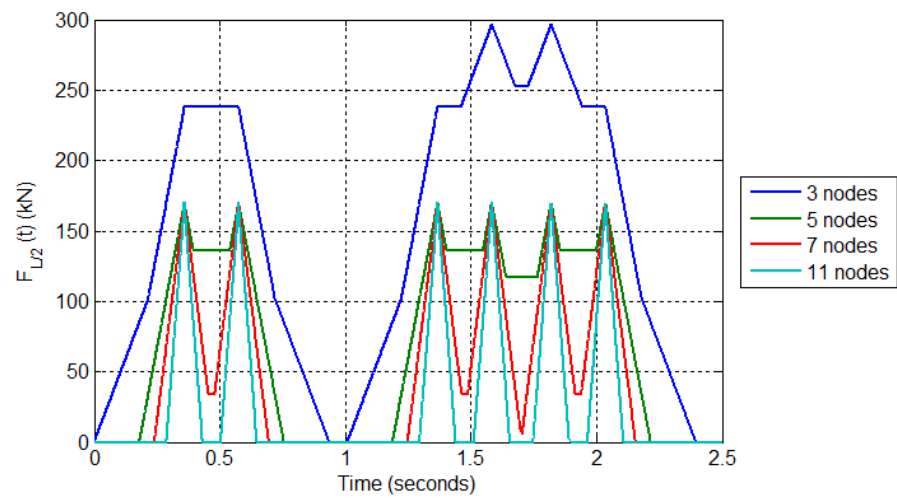
A Figura 2.6a mostra as funções de força obtidas com a ferramenta *Bridge Assistant Code* para o nó central de um percurso de 10 m discretizado em 11 nós, considerando o veículo ferroviário *Eurostar* (trem utilizado no transporte de passageiros em ferrovias europeias de alta velocidade) a uma velocidade de 50 km/h. Na Figura 2.6b, as funções de força para o nó central são plotadas para diferentes níveis de discretização do percurso das cargas.



Figura 2.6- Funções de forças geradas pela ferramenta *Bridge Assistant Code* (TEIXEIRA, 2015) para o nó central de um percurso de 10 m com (a) 11 nós e com (b) 3, 5, 7 e 11 nós, considerando o veículo *Eurostar* a 50 km/h



(a)



(b)

Fonte: O autor

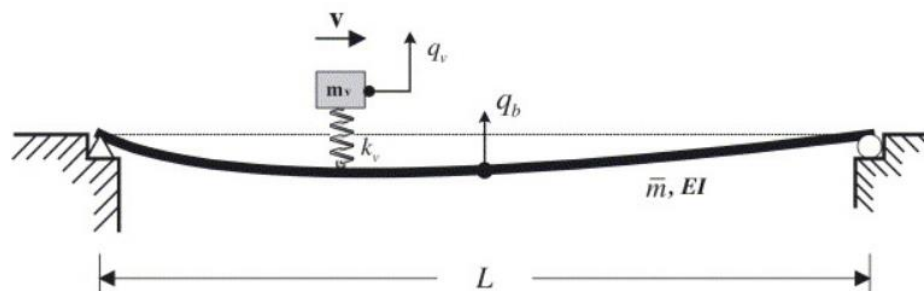
### 3 METODOLOGIA DE INTERAÇÃO VEÍCULO-PONTE: MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS

#### 3.1 VIGA SIMPLESMENTE APOIADA SOLICITADA POR UMA MASSA SUSPensa MOVENDO-SE COM VELOCIDADE CONSTANTE

O problema de interação veículo estrutura é bastante complexo, porque, a resposta dinâmica depende de várias variáveis como: massa, rigidez, amortecimento, irregularidades da via, velocidade, e sobretudo, o contato da roda-trilho.

Esta seção consistirá em apresentar o modelo de massa suspensa, considerando a massa do veículo e sua suspensão Yang *et al.* (2004), Yang *et al.* (2005) e Yang *et al.* (2009). A descrição do problema pode ser observada na figura 3.1.

Figura 3.1-Modelo de massa suspensa para uma viga simplesmente apoiada



Fonte: Yang *et al.* (2005)

Considerando a viga apresentada na figura (3.1), contendo uma massa e rigidez, supondo que está se move com velocidade constante em uma superfície sem irregularidades e sem amortecimento, admitido a hipótese para as vigas de Euler-Bernoulli. A equação do movimento para a ponte e o veículo podem ser escritas respectivamente como:

$$\bar{m}\ddot{u} + EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = P(x,t) \quad (3.1)$$

$$m_v \ddot{q}_v + k_v q_v = k_v u|_{x=vt} \quad (3.2)$$

Onde,  $\bar{m}$  é massa por unidade de comprimento,  $EI$  rigidez a flexão,  $m_v$ ,  $k_v$ ,  $q_v$ , são a massa do veículo, rigidez do sistema de suspensão, deslocamento vertical

respectivamente.  $P(x, t)$  representa a carga aplicada que atua na ponte através do ponto de contato. O deslocamento da estrutura é dado por  $u(x, t)$ .

A força aplicada na ponte pode ser definida usando a função delta de Dirac e a força de contato ( $f_c(t)$ ) entre o peso do veículo e o sistema de suspensão.

$$p(x, t) = f_c(t)\delta(x - vt) \quad (3.3)$$

A força de contato é obtida somando-se o peso do veículo e força elástica exercida pelo sistema de suspensão de acordo com a equação:

$$f_c(t) = -m_v g + k_v (q_v - u|_{x=vt}) \quad (3.4)$$

A solução da equação do movimento para ponte pode ser resolvida em coordenadas modais utilizando o método da superposição modal.

Admitido que a deformação da viga é dada por uma função senoidal conforme a equação (2.26). O deslocamento da ponte por superposição modal é dado por:

$$u(x, t) = \sum_n \sin \frac{n\pi x}{L} q_{bn}(t) \quad (3.5)$$

Substituído a equação (3.3) na equação (3.1), multiplicando ambos os membros por  $\phi_m(x)$ , resolvendo as derivadas e integrando toda a viga ao longo de seu comprimento  $L$  em função de  $x$  efetuando algumas manipulações algébrica e mudando o subscrito de  $m$  para  $n$  obtém-se.

$$\ddot{q}_{bn} + \omega_n^2 q_{bn} = \frac{\int_0^L f_c(t) \phi_n(x) \delta(x - vt) dx}{\bar{m} \int_0^L [\phi_n(x)]^2 dx} \quad (3.6)$$

Observa que a equação (3.6) é semelhante a equação (2.25), a principal diferença entre ambas, é a consideração do amortecimento e a forma como a força de contato foi definida no problema.

Utilizando a frequência de vibração da estrutura definida na equação (2.27), e realizando algumas manipulações algébricas e considerando que a massa do veículo é muito menor que a da ponte  $\frac{m_v}{\bar{m}L} \ll 1$  a equação do movimento para a ponte torna-se idêntica à que representa uma carga móvel desconsiderando o amortecimento.

$$\ddot{q}_{bn} + \omega_n^2 q_{bn} = \frac{-2m_v g}{\bar{m}l} \sin \frac{n\pi vt}{L} \quad (3.7)$$

De forma semelhante e utilizando os procedimentos apresentados para a dedução da equação (3.7) a equação do movimento para veículo e sua frequência natural de vibração podem ser expressas por:

$$\ddot{q}_v + \omega_v^2 q_v = \omega_v^2 \sum_n \sin \frac{n\pi vt}{L} q_{bn},$$

$$\omega_v = \sqrt{\frac{k_v}{m_v}} \quad (3.8)$$

O deslocamento da ponte é obtido pela equação (3.5), sendo que,  $q_{bn}(t)$  é a solução da equação diferencial do movimento da estrutura (3.8), portanto:

$$u(x,t) = \frac{-2m_v g L^3}{n^4 \pi^4 EI (1 - S_n^2)} \left[ \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) - S_n \sin(\omega_{bn} t) \right] \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.9)$$

Observe que a equação (3.9) é semelhante a deslocamento devido a carga móvel atuando na estrutura com velocidade constante como pode ser observado na equação (2.35). A principal diferença entre as formulações descritas no problema está na consideração da massa suspensa.

A resposta dinâmica do veículo pode ser determinada considerando o acoplamento das equações do movimento. Na solução apresentada anteriormente (3.9) o termo sublinhado representa o resultado da equação (3.7), substituído esta parcela em (3.9) a equação terá no seu segundo membro a parcela que reflete o fenômeno de interação veículo-ponte. A solução para o problema considerando o acoplamento é obtida em função do tempo utilizando a integral de Duhamel.

$$q_v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{1n} \cos\left(\frac{(n-1)\pi v}{L} t\right) + A_{2n} \cos\left(\frac{(n+1)\pi v}{L} t\right) + A_{3n} \cos(\omega_v t) + A_{4n} \cos\left(\omega_{bn} - \frac{n\pi v}{L} t\right) + A_{5n} \left(\omega_{bn} + \frac{n\pi v}{L} t\right) \right] \quad (3.10)$$

Sendo,  $\Delta_{stn} = \frac{-2m_v g L^3}{EI n^4 \pi^4}$ , têm-se:

$$A_{1n} = \frac{\Delta_{stn} \omega_v^2}{2(1 - S_n^2)(\omega_v + (n-1)\pi v/L)(\omega_v - (n-1)\pi v/L)}, \quad (3.11)$$

$$A_{2n} = \frac{-\Delta_{stn} \omega_v^2}{2(1 - S_n^2)(\omega_v + (n+1)\pi v/L)(\omega_v - (n+1)\pi v/L)}, \quad (3.12)$$

$$A_{3n} = \frac{2\Delta_{stn} \omega_v^2 \left(\frac{\pi v n}{L}\right)}{(1 - S_n^2)(\omega_v + (n-1)\pi v/L)(\omega_v - (n-1)\pi v/L)(\omega_v + (n+1)\pi v/L)(\omega_v - (n+1)\pi v/L)} \quad (3.13)$$

$$A_{4n} = \frac{-\Delta_{snt} S_n \omega_v^2}{2(1-S_n^2)(\omega_v - \omega_{bn} + n\pi v/L)((\omega_v + \omega_{bn} - n\pi v/L))} \quad (3.14)$$

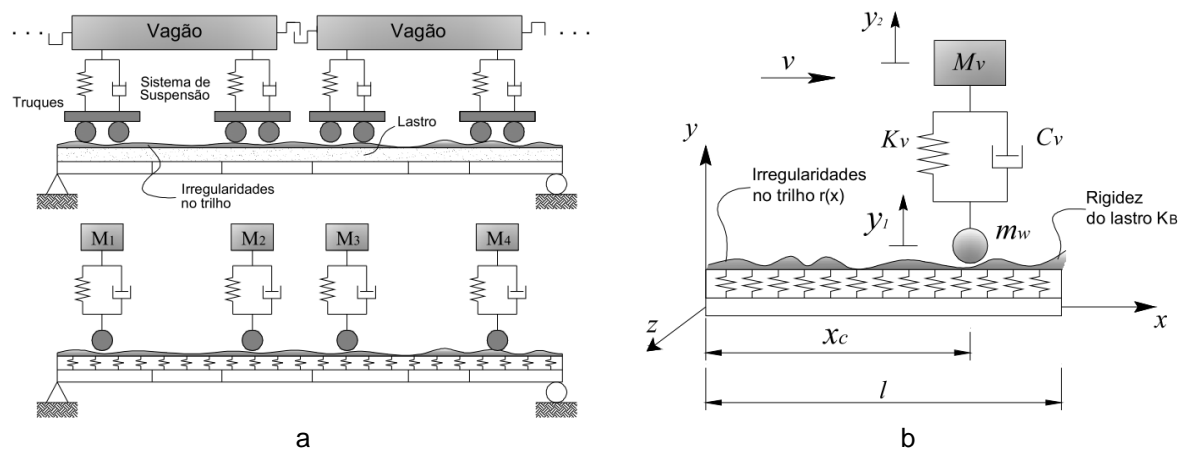
$$A_{5n} = \frac{\Delta_{snt} S_n \omega_v^2}{2(1-S_n^2)((\omega_v + \omega_{bn} + n\pi v/L)(\omega_v - \omega_{bn} - n\pi v/L))} \quad (3.15)$$

A resposta do veículo calculada a partir da equação (3.9) leva em consideração a força atuante na estrutura. A resolução do problema ponte veículo é de natureza interativa, nesta solução foi considerando apenas a primeira interação.

### 3.2 MODELAGEM DO VEÍCULO COMO UMA SEQUÊNCIA DE MASSAS SUSPENSAS

Nesta seção será apresentado a formulação para o problema de interação veículo-ponte acoplado. Para a solução desse problema, o veículo é modelado por um conjunto de massas suspensas. Deve-se admitir para o veículo uma velocidade constante, sistema de suspensão, amortecimento além das irregularidades na via. A descrição das hipóteses adotadas podem ser observadas na figura (3.2). Esta metodologia está descrita em Yang *et al.* (2004).

Figura 3.2-Representação do sistema veículo- ponte como uma sequência de massa suspensas (a)  
(b) Modelo simplificado para o problema de interação veículo-estrutura



Fonte: Yang *et al.* (2004)

O modelo simplificado é formado por duas massas concentradas  $M_v$  e  $m_w$ , que representam o corpo do veículo e a massa das rodas respectivamente. Sendo,  $c_v$  e

$k_v$  o amortecimento e rigidez do sistema de suspensão do veículo. A resposta dinâmica para o problema apresentado é estabelecida escrevendo dois conjuntos de equações do movimento uma para o veículo e a outra para a ponte.

As forças de interação ou força de contato que existem entre o sistema ponte - veículo formam um conjunto de equações acopladas que são resolvidas a cada intervalo de tempo, sendo necessário realizar um processo iterativo para a solução das equações. (YANG *et al.*, 2004).

A equação do movimento para o modelo de uma sequência massas suspensas da figura 3.2 pode ser expressa como (FRÝBA, 1972):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_w & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_1 \\ \ddot{\mathbf{y}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_v & -\mathbf{c}_v \\ -\mathbf{c}_v & \mathbf{c}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_v & -\mathbf{k}_v \\ -\mathbf{k}_v & \mathbf{k}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p + f_c \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Onde, a notação  $[ ]$  é usada para matriz quadradas,  $\{ \}$  para vetor coluna e  $\langle \rangle$  vetor linha. Os deslocamentos verticais dos nos, pode ser escrito em coordenadas generalizadas apresentado como  $\{y\}^T = \langle y_1, y_2 \rangle$ . As forças externas que solicitam o veículo são expressas por  $\{p\} = \langle p, 0 \rangle$  onde,  $p = -(M_v + m_w)g$ . A força de interação entre o veículo e a estrutura é denotado  $f_c$  e o ponto de contato é representado por  $x_c$ . O deslocamento vertical da ponte em  $x_c$  é dado por:

$$\{N_c\} = \{N_i(x_c)\} \quad (3.17)$$

No qual  $\{N_c\}$  representa as funções de interpolação hermitiana cúbica para o deslocamento vertical na ponte considerado o ponto de contato  $x_c$ . É necessário admitir que a força de interação entre o veículo e a ponte seja  $f_c \geq 0$ . Esta condição é exigida a fim de permite contato entre o veículo e ponte para garantir o acoplamento dos subsistemas. A força de interação e a equação do movimento para a estrutura podem ser escritas respectivamente como:

$$f_c = k_b (\langle N_c \rangle) \{u_b\} + r_c - y_1 \geq 0 \quad (3.18)$$

$$[\mathbf{m}_b] \{\ddot{u}_b\} + [\mathbf{c}_b] \{\dot{u}_b\} + [\mathbf{k}_b] \{u_b\} = \{p_b\} - \{N_c\} f_c \quad (3.19)$$

No qual  $k_b$  é a rigidez do lastro;  $u_b$  deslocamento nodal na ponte ;  $r_c$  irregularidades no trilho no ponto de contato;  $[m_b]$  matriz de massa;  $[c_b]$  matriz de amortecimento;  $[k_b]$  matriz de rigidez e  $\{p_b\}$  cargas nodais externas que atua na ponte.

A partir das equações (3.16) e (3.19) nota-se que o veículo e a ponte exercem interação através da força de contato  $f_c \geq 0$  ( $f_c = -p + m_w \ddot{y}_1 + M_v \ddot{y}_2$ ), que varia em função do tempo e posição.

Para assegurar que o veículo esteja com interação com a estrutura, a força de resistência exercida pela ponte sobre os sistemas de massa suspensas devem ter amplitude muito baixa. Caso a força de contato seja ( $f_c < 0$ ), as massas da roda saltam na direção vertical para cima e a condição de contato entre os subsistemas é violada. (YANG *et al.*, 2004).

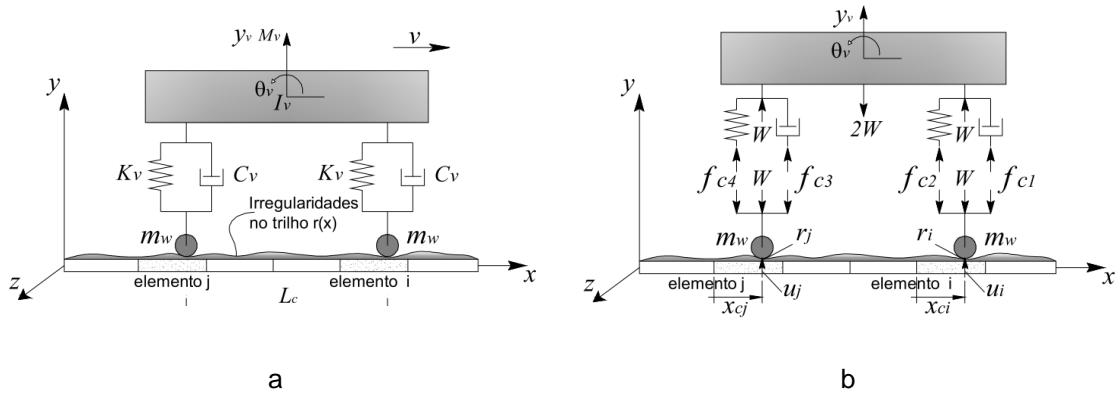
A resposta dinâmica da ponte depende da carga móvel e do sistema de suspensão como pode ser observado na equação (3.18) e (3.19). O procedimento completo de como resolver esse problema é descrito por YANG *et al.*, (2004).

### 3.3 MODELAGEM DO VEÍCULO COM INCLUSÃO DE ELEMENTOS RÍGIDOS

Na seção anterior foram apresentadas as equações do movimento para um sistema de massas suspensas considerando a irregularidade da via, a solução deste problema é feita por um processo iterativo, pois, as forças de contato entre os subsistemas proporcionam o acoplamento das equações que variam com o tempo e posição.

O modelo de massas suspensas pode ser melhorado considerando o veículo como uma corpo rígido movendo-se com velocidade constante sustentado por dois sistemas de suspensão figura (3.3), onde  $r(x)$  representa a irregularidades da via e  $m_w$  as massas da roda conforme a figura (3.3) (YANG *et.al.*, 2004).

Figura 3.3-Modelo de massas suspensas melhorado (a) Diagrama de corpo livre para o problema (b)



Fonte: Yang *et al.* (2004)

Nessa seção, será demonstrado as equações do movimento elaboradas por Yang *et al.* (2004), para o sistema veículo-estrutura considerando o corpo do veículo como um elemento rígido. Para a presente formulação, a ponte é modelada como um elemento de viga e cada vagão ferroviário como um corpo rígido apoiada por dois sistemas de suspensão.

O movimento de corpo rígido é descrito por coordenadas generalizadas  $\{y\}^T = \{y_v, \theta_v\}$ , sendo  $y_v$  o deslocamento vertical e  $\theta_v$  a rotação no centroide do corpo rígido. Na figura (3.3b) os índices  $i$  e  $j$  são empregados para indicar as rodas traseira e dianteira do veículo.

O peso do veículo é dado  $2W$  sendo,  $(W = \frac{1}{2} M_v g)$ , onde  $M_v$  representar a massa total do veículo e  $g$  a aceleração da gravidade). A posição de contato que permite o acoplamento e a interação entre os dois subsistemas é  $x_c$ ,  $u$  é o deslocamento vertical na viga conforme a figura (3.3b). As forças de suspensão que atuam na frente ( $f_{c1}$  e  $f_{c2}$ ) e na traseira do veículo ( $f_{c3}$  e  $f_{c4}$ ) são descritas abaixo.

$$f_{c1} = c_v(\dot{u} - \dot{y}_v - \frac{1}{2} L_c \dot{\theta}_v) \quad (3.10)$$

$$f_{c2} = k_v(u_i + r_i - y_v - \frac{1}{2} L_c \theta_v) \quad (3.11)$$

$$f_{c3} = c_v(\dot{u}_j - \dot{y}_v + \frac{1}{2} L_c \dot{\theta}_v) \quad (3.12)$$

$$f_{c4} = k_v(u_j + r_j - y_v + \frac{1}{2} L_c \theta_v) \quad (3.13)$$

Onde  $k_v$  e  $c_v$  significam a rigidez e o coeficiente de amortecimento da suspensão do veículo respectivamente, a distância entre os eixos dos veículos, as



irregularidades na via e deslocamentos são representados por  $L_c, r_i, r_j, u_i$  e  $u_j$  respectivamente. Onde  $i$  e  $j$  indicam os pontos de contato.

A equação de equilíbrio para o problema é determinada a partir das forças de suspensão, massa total do veículo e a inercia rotacional do veículo  $I_v$ . Para o diagrama de corpo livre da figura (3.3b) têm-se:

$$\begin{aligned} f_{c1} + f_{c2} + f_{c3} + f_{c4} &= M_v \ddot{y}_v \\ \frac{1}{2} L_c (f_{c1} + f_{c2} - f_{c3} - f_{c4}) &= I_v \ddot{\theta}_v \end{aligned} \quad (3.14)$$

Substituindo as forças de suspensão ( $f_{c1}, f_{c2}, f_{c3}$  e  $f_{c4}$ ) na equação de equilíbrio (3.14), e efetuando algumas manipulações algébricas, a equação do movimento para o deslocamento vertical e rotacional do veículo é dado por:

$$\begin{bmatrix} M_v & 0 \\ 0 & I_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_v \\ \ddot{\theta}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c_v & 0 \\ 0 & 0.5c_v L_c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_v \\ \dot{\theta}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k_v & 0 \\ 0 & 0.5k_v L_c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_v \\ \theta_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_v(\dot{u}_i + \dot{u}_j) + k_v(u_i + u_j) + k_v(r_i + r_j) \\ 0.5L_c[c_v((\dot{u}_i - \dot{u}_j) + k_v(u_i - u_j) + k_v(r_i - r_j))] \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

A ponte é simulada usando elemento de viga, onde o deslocamento axial é interpolado por funções lineares e funções de interpolação cúbicas são usadas para os deslocamentos transversais, a equação do movimento para ponte é expressa abaixo. (YANG *et al.*, 2004).

$$\begin{aligned} [\mathbf{m}_i] \{\ddot{u}_i\} + [\mathbf{c}_i] \{\dot{u}_i\} + [\mathbf{k}_i] \{u_i\} &= - \left[ \underline{f_{c1} + f_{c2} + 0.5M_v g + m_w(g + \ddot{u}_i)} \right] \{N_{ci}\} \\ [\mathbf{m}_j] \{\ddot{u}_j\} + [\mathbf{c}_j] \{\dot{u}_j\} + [\mathbf{k}_j] \{u_j\} &= - \left[ \underline{f_{c3} + f_{c4} + 0.5M_v g + m_w(g + \ddot{u}_j)} \right] \{N_{cj}\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Onde,  $\{u\} = \{N_c\} \{\bar{u}_y\}$  representa o vetor deslocamento na ponte na direção vertical para cima em uma determinada posição  $x$ ,  $\{N_c\}$  é a função de interpolação relacionada ao deslocamento na direção  $y$  analisadas no ponto de contato,  $\{\bar{u}_y\}$  expressa os graus de liberdade do nó. As matrizes de massa, amortecimento e rigidez da ponte são dadas respectivamente por  $[\mathbf{m}]$ ,  $[\mathbf{c}]$  e  $[\mathbf{k}]$ .

As expressões sublinhadas no segundo membro da equação do movimento representam as forças de contato que indicam contribuição das cargas estáticas presentes no sistema veículo-estrutura, forças amortecidas, forças elásticas e forças de inércia correspondente a aceleração vertical da ponte.

### 3.4 METODOLOGIA INTERATIVA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE INTERAÇÃO VEÍCULO-ESTRUTURA CONSIDERADO O DESACOPLAMENTO DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO.

A análise dinâmica da interação veículo-ponte é um problema não linear. O equilíbrio dinâmico entre os dois subsistemas é definido por dois conjuntos de equações do movimento, uma para ponte e a outra para veículo.

A solução dessas equações podem ser feitas de forma acoplada por intermédio de um processo iterativo ou desacoplada, no qual, a cada instante de tempo as equações de movimento da estrutura e veículos são resolvidas separadamente de forma simultânea, para cada incremento de tempo as equações são compatibilizadas em termos de força dinâmica de interações e deslocamentos das cargas móveis. (RIBEIRO, 2012).

O procedimento de solução considerando o desacoplamento das equações mostrado neste tópico foi desenvolvido por Ribeiro (2012). A equação do movimento para os subsistemas ponte- veículo desacoplada é apresentada abaixo.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_p \\ \ddot{\mathbf{u}}_v \end{Bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_p \\ \dot{\mathbf{u}}_v \end{Bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{u}_v \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p \\ \mathbf{F}_v \end{Bmatrix}_t \quad (3.17)$$

onde,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, os vetores aceleração, velocidade e deslocamentos são  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  respectivamente. Os índices “ $p$ ” e “ $v$ ” indicam as matrizes referentes a ponte e veículo respectivamente, o vetor das forças nodais é representado por  $\mathbf{F}$ . O processo iterativo para a solução do problema a cada incremento de tempo  $\Delta t$  é representado abaixo.

a) As cargas móveis aplicadas na ponte são obtidas pela equação:

$$F_p^k(t) = F_{sta} + F_{dyn}^{k-1}(t) \quad (3.18)$$

onde,  $F_{sta}$  expressa a força estática de interação e  $F_{dyn}^{k-1}(t)$  a componente da força de interação relativa a interação anterior.

b) Os deslocamentos dos pontos de contato do veículo  $u_v^k(t)$ , é obtido pela soma das irregularidades da via  $r(x)$  com o deslocamento da ponte  $u_p^{k-1}$  conforme a expressão.

$$u_v^k(t) = u_p^{k-1} + r(x) \quad (3.19)$$

A partir da solução dos sistemas de equações do movimento para o veículo, para cada ponto de contato, as forças de reação devido as cargas moveis  $F_i^k(t)$ , que tem as componentes dinâmicas das forças de interação  $F_{dyn}^{k-1}(t)$  são aplicadas na ponte na próxima interação, ou seja:

$$F_{dyn}^{k-1}(t) = F_v^k(t) \quad (3.20)$$

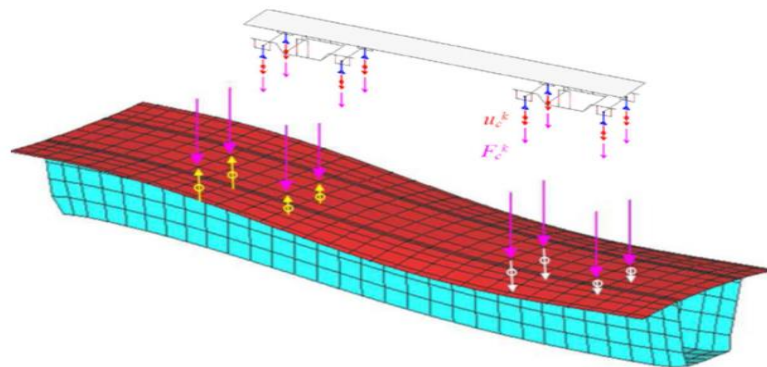
- c) A cada interação aplica-se o critério de convergência, que é calculado pelas funções temporais da força de contato e as forças calculadas na última interação, conforme a equação:

$$e = \frac{|F_{dyn}^i(t) - F_{dyn}^{i-1}(t)|}{|F_{dyn}^{i-1}(t)|} \leq \alpha \quad (3.21)$$

Se o erro  $e$  for menor ou igual da tolerância  $\alpha \approx 10^{-6}$  a compatibilização dos subsistemas é satisfeita.

No caso de a condição anterior não for satisfeita, procede uma nova interação admitido que as forças de interação no tempo inicial são nulas.  $F_{dyn}^k(t=0) = 0$ . O procedimento descrito pode ser observado na figura abaixo.

Figura 3.4-Modelo de interação veículo-estrutura considerando o desacoplamento



Fonte: Ribeiro (2012)

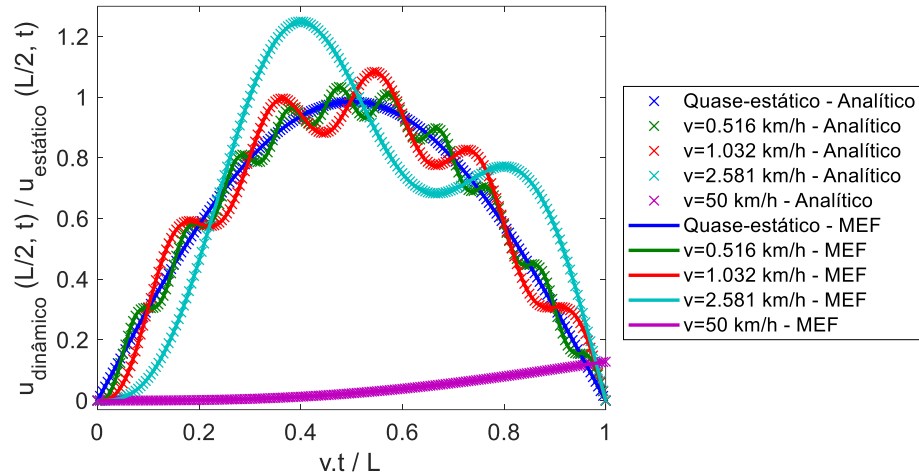
## 4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL: METODOLOGIAS ANALÍTICAS E NUMÉRICAS

### 4.1 EXEMPLO 01: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOLICITADA POR UMA CARGA MÓVEL ISOLADA

A fim de validar a metodologia descrita nas seções 2 e 3, foram processados alguns exemplos, cujas soluções são referenciadas na literatura. O primeiro deles é o problema fundamental de uma viga simplesmente apoiada de vão  $L$  e rigidez  $EI$  sujeita a uma carga móvel concentrada  $p$  que se desloca com velocidade constante  $v$ . Este problema possui solução analítica, para o caso não amortecido, expressa de acordo com a equação (2.35).

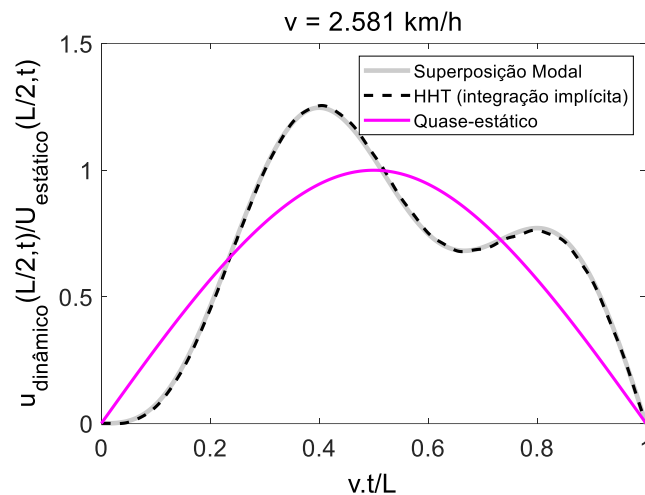
Para avaliar a resposta, utilizou-se uma viga analisada em Yang et al. (2004) com as seguintes características:  $L = 20 \text{ m}$ ,  $\bar{m} = 3000 \text{ kg / m}$ ,  $EI = 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ,  $p = 6 \text{ kN}$ . A Figura 4.1 mostra uma comparação, em termos de deslocamentos verticais no meio do vão, entre os resultados analíticos e os obtidos com o MEF através da metodologia implementada no software ABAQUS™ com auxílio da ferramenta *Bridge Assistant Code*, considerando as funções de forças nodais geradas pela passagem das cargas móveis concentradas. O modelo em MEF foi construído utilizando 20 elementos de viga de Euler-Bernoulli tipo B23 (duas dimensões com função de interpolação cúbica). A análise modal dinâmica foi realizada considerando a contribuição somente do 1º modo de flexão ( $f_1 = 0.717 \text{ Hz}$ ), com  $\Delta t = 0.05$  segundos. A Figura 4.2 mostra a comparação entre os diferentes procedimentos de análise numéricas realizadas considerando incrementação de 0.05 segundos no método implícito sem recorrer ao recurso de dissipação numérica do algoritmo HHT (ou seja,  $\alpha = 0$ ). Em todos, os casos os resultados foram praticamente coincidentes.

Figura 4.1- Comparação entre os deslocamentos no meio do vão para várias velocidades



Fonte: O Autor

Figura 4.2- Comparação entre os deslocamentos no meio do vão para os diferentes tipos de análise



Fonte: O Autor

## 4.2 EXEMPLO 02: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOLICITADA POR UM CONJUNTO DE CARGAS MÓVEIS

Esta é uma aplicação que considera uma viga isostática de comprimento  $L = 15 \text{ m}$ , rigidez a flexão  $EI = 7694 \times 10^6 \text{ Nm}^2$ , coeficiente de amortecimento  $\xi = 0.02$ , solicitada pelo trem de alta velocidade *Eurostar*, cuja a geometria de cargas/eixo é mostrada na Figura 4.3. A ponte tem massa/comprimento  $\bar{m} = 15000 \text{ kg/m}$ . A estrutura foi analisada considerando a solução analítica proposta por Frýba (2001), já descrita na seção 2.3.2, e a solução obtida por meio do MEF, implementado no código

ABAQUS™ com auxílio da ferramenta *Bridge Assistant Code*. Para este último caso, aplicou-se o processo de Superposição Modal incluindo os 3 primeiros modos de flexão vertical e o incremento de tempo de 0.003 segundos foi adotado, com base nos critérios apresentados na seção 2, para integração das equações modais desacopladas. A Figura 4.4 mostra, em termos de acelerações e deslocamentos, uma comparação entre os diferentes métodos, respectivamente. Na figura, as respostas dinâmicas são mostradas no domínio do tempo na velocidade de 350 km/h, onde os efeitos ressonantes são consideráveis. Também é mostrada a resposta quase estática para os deslocamentos.

Figura 4.3 -Trem Eurostar: geometria e cargas/eixo.

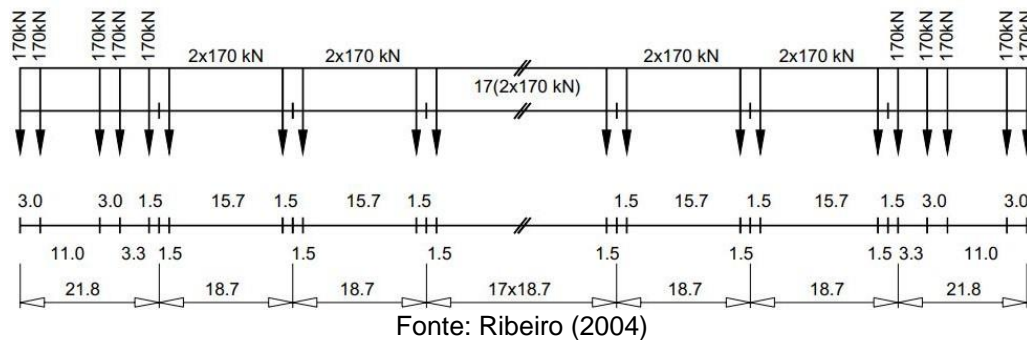
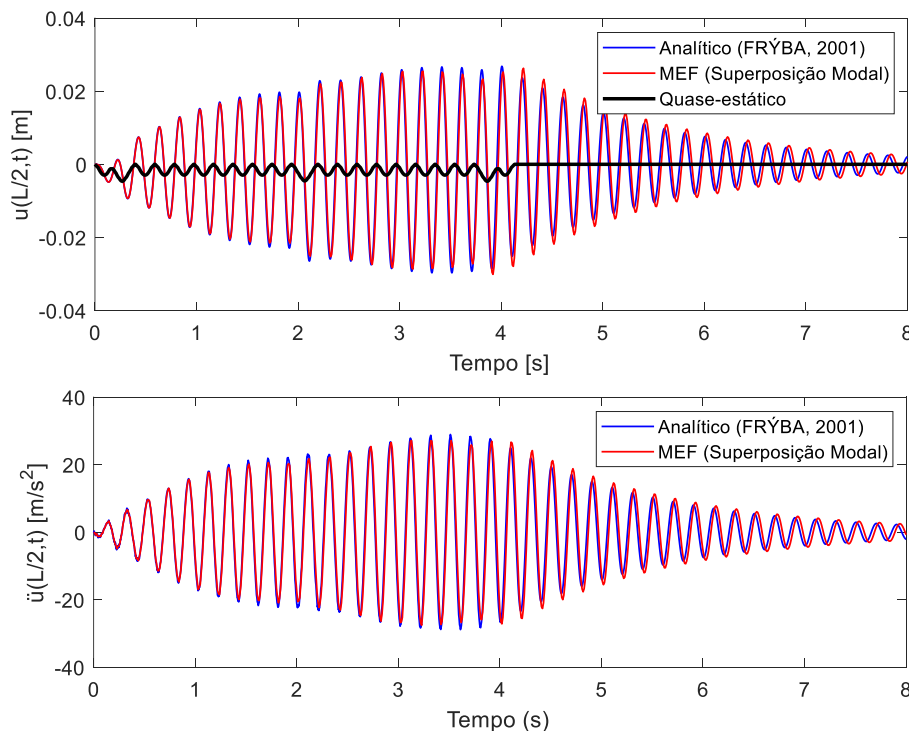


Figura 4.4- Respostas dinâmicas verticais no meio do vão para o trem Eurostar a 350 km/h.

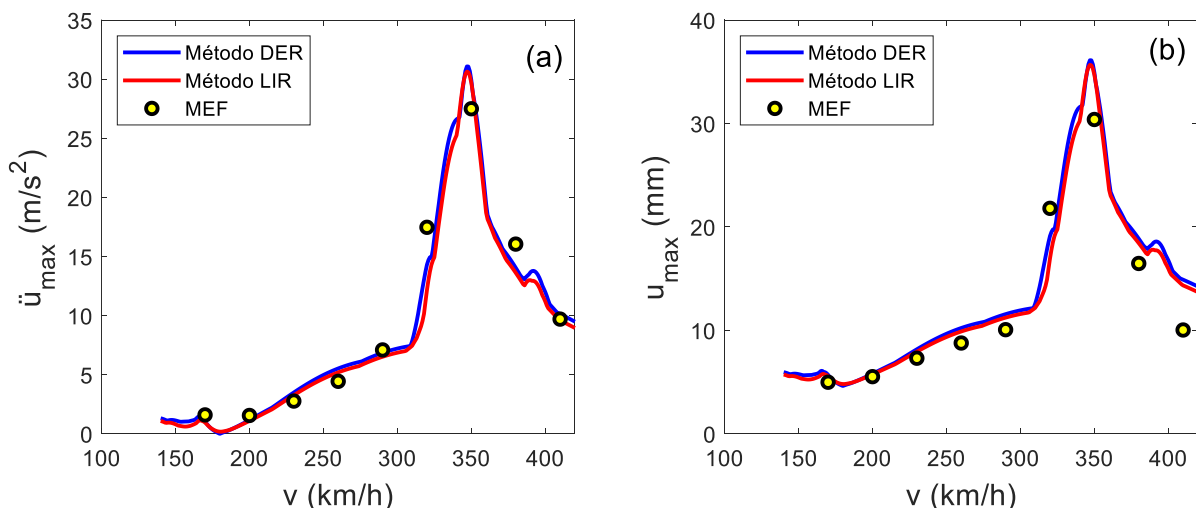


A partir dos resultados mostrados na Figura 4.4, percebe-se grandes amplificações dinâmicas tanto para os deslocamentos quanto para as acelerações da ponte, em decorrência da velocidade de ressonância para a primeira frequência natural da estrutura. A presença do amortecimento é essencial para garantir a estabilidade da estrutura em situações de ressonância, dado que a energia de excitação é dissipada, reduzindo as amplitudes de vibração.

### 4.3 EXEMPLO 03: METODOLOGIAS DER E LIR

Nesta aplicação, considerou-se a mesma estrutura e trem estudados no Exemplo 02, mas as soluções, geradas em termos de acelerações e deslocamentos máximos no meio do vão, foram obtidas com a utilização das metodologias analíticas DER (Decomposição da Excitação em Ressonância) e LIR (Linha de Influência Residual) para uma gama de velocidades de 140 km/h a 420 km/h, com incrementos de 1 km/h. A Figura 4.5 mostra os resultados gerados com base nas soluções analíticas implementadas em MATLAB™ e comparados aos obtidos com base no MEF, com implementação foi feita no código ABAQUS™ com auxílio da ferramenta *Bridge Assistant Code*.

Figura 4.5 - Respostas dinâmicas máximas da ponte em termos de: (a) acelerações e (b) deslocamentos.



Fonte: O Autor

A partir dos resultados mostrados, percebe-se que ambas as metodologias apresentam resultados similares e concordância satisfatória com as respostas obtidas

via MEF. Nota-se também que os deslocamentos máximos e acelerações ocorrem quando o veículo alcança a velocidade de ressonância, estando de acordo com os resultados apresentados no Exemplo 02. Verifica-se que as respostas dinâmicas máximas não são significativas para baixas velocidades, inferiores a 200 km/h. Observa-se também que as acelerações verticais calculadas no exemplo podem violar a condição de estado limite de vibração excessiva para uma velocidade em torno de 230 km/h, já que, conforme assinalado pelo Comitê ERRI D214/RP9 (2000), o valor máximo da aceleração vertical do tabuleiro para ferrovia com lastro é equivalente a  $3.5 \text{ m/s}^2$ . A limitação da aceleração vertical no tabuleiro é um parâmetro que está relacionado ao fenômeno de instabilidade do lastro, caracterizado pela diminuição entre as forças de atrito existentes entre as partículas.

#### **4.4 EXEMPLO 04: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOLICITADA POR UMA MASSA SUSPensa POR MOLA**

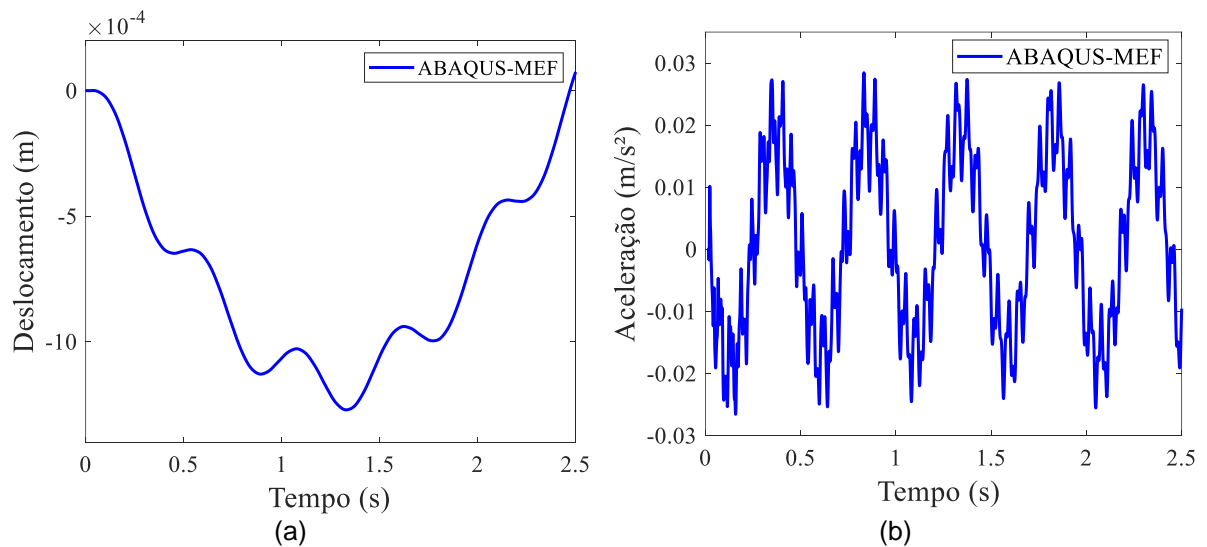
Para este exemplo, estudou-se a viga simplesmente apoiada analisada por Yang *et al.*, (2005), cujo esquema é mostrado na Figura 3.1. A estrutura apresenta seção transversal com área  $A = 2 \text{ m}^2$ , momento de inércia  $I = 2.9 \text{ m}^4$ , módulo de elasticidade longitudinal  $E = 2.75 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ , comprimento  $L = 25 \text{ m}$ , massa da ponte distribuída  $\bar{m} = 4800 \text{ kg/m}$ , massa do veículo  $m_v = 1200 \text{ kg}$ , coeficiente de rigidez da mola  $k_v = 500000 \text{ N/m}$ , velocidade do veículo  $v = 36 \text{ km/h}$ , frequência natural de vibração do veículo  $\omega_v = 3.25 \text{ Hz}$ . As três primeiras frequências naturais da ponte são  $\omega_{b1} = 2.08 \text{ Hz}$ ,  $\omega_{b2} = 8.33 \text{ Hz}$  e  $\omega_{b3} = 18.75 \text{ Hz}$ . O amortecimento não é considerado no problema.

A análise dinâmica foi realizada utilizando o algoritmo HHT (HUGHES, 1987) no software ABAQUS™. A ponte foi modelada por meio de 10 elementos de viga tipo BEAM B23 (duas dimensões com função de interpolação cúbica). Para a massa pontual do veículo, utilizou-se o elemento tipo MASS e para simular a rigidez da mola, utilizou-se o elemento SPRING. A fim de garantir o acoplamento entre os dois subsistemas, foram impostas restrições de contato entre os elementos da ponte e o nó inferior da mola. O algoritmo MASTER-SLAVE para deslizamentos finitos (FINITE-SLIDING) foi aplicado para a solução do problema de contato. Utilizou-se o método de Lagrange Aumentado para imposição das restrições e a hipótese de contato severo



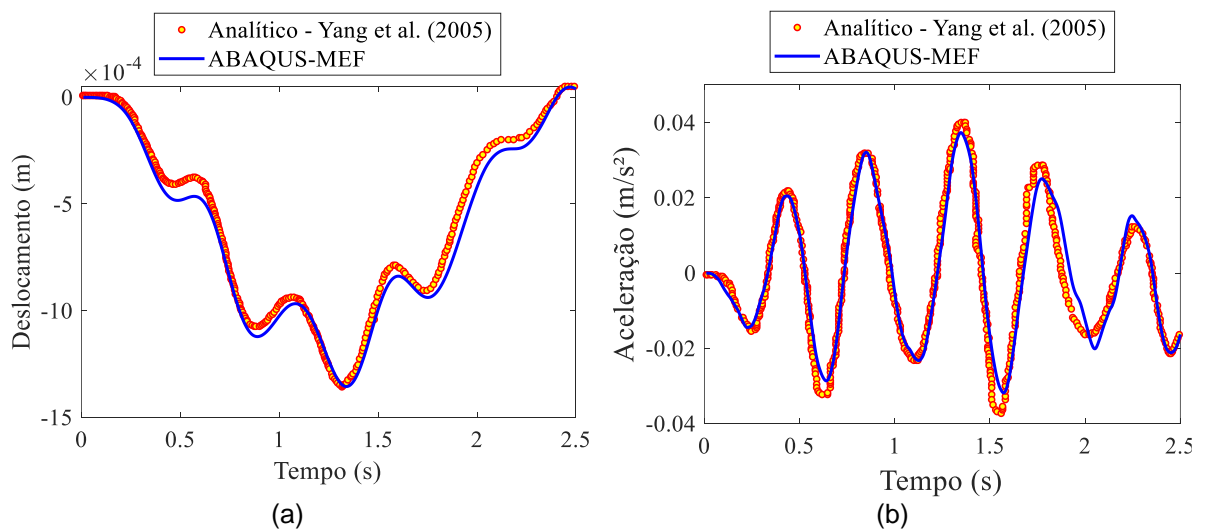
(*HARD CONTACT*) foi adotada para modelagem da relação pressão de contato-interpenetração. O incremento de tempo  $\Delta t = 0.001$  s foi atribuído para o procedimento de integração implícita. As respostas dinâmicas para o nó central da ponte e para o nó que concentra a massa do veículo, em termos de deslocamentos e acelerações, obtidas no software ABAQUS™, são mostradas nas Figuras 4.6 e 4.7, respectivamente. Na Figura 5.7, os resultados também são comparados aos obtidos por Yang et al. (2005) por via analítica.

Figura 4.6 - Resposta dinâmica da ponte no ponto central do vão: (a) Deslocamentos, (b) Acelerações



Fonte: O autor

Figura 4.7 - Resposta dinâmica para o veículo: (a) Deslocamentos, (b) Acelerações



Fonte: O autor

A solução analítica para o primeiro modo de vibração proposta por Yang *et al.* (2005) apresenta uma boa concordância com as respostas para aceleração e

deslocamento do veículo obtidos por meio do MEF. De fato, a similaridade das soluções está relacionada à consideração do acoplamento entre as equações do movimento do veículo e da ponte. A diferença relativamente pequena ocorre porque a solução considera apenas uma única interação (cálculo direto) entre o sistema ponte-veículo. A resposta dinâmica obtida através do ABAQUS para a aceleração da ponte mostra um comportamento periódico. Isso evidencia que a função de excitação dinâmica provocada pelo sistema de massa suspensa tem um comportamento similar a uma função harmônica. Vale ressaltar que não foi encontrada a solução analítica para as respostas dinâmicas da ponte na referida referência.

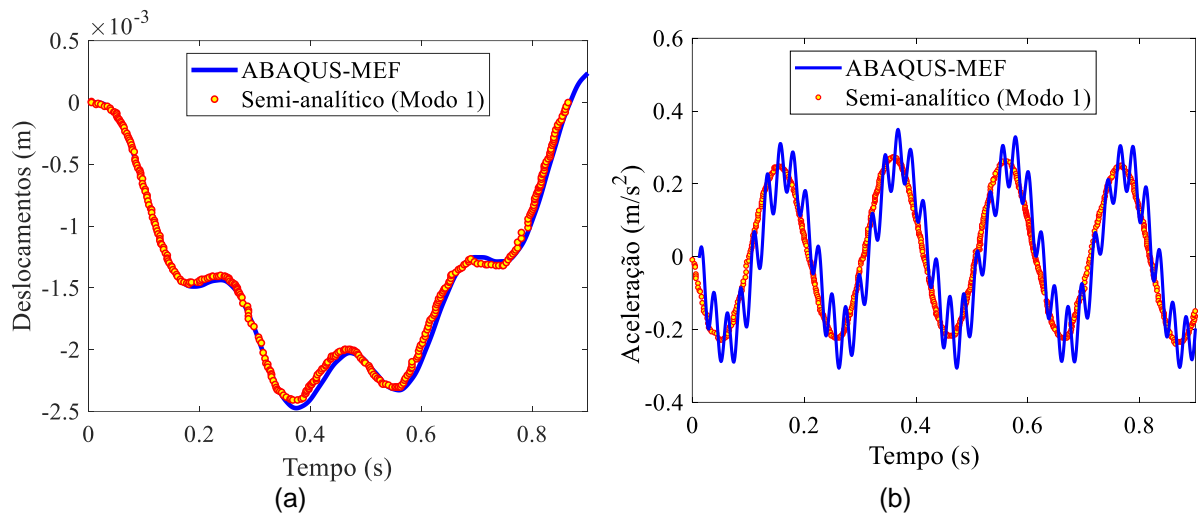
#### 4.5 EXEMPLO 05: VIGA SIMPLEMENTE APOIADA SOLICITADA POR UMA MASSA SUSPensa: SOLUÇÃO SEMI-ANALÍTICA

Este exemplo considera a viga simplesmente apoiada cuja solução semi-analítica foi apresentada por Biggs (1964). A estrutura apresenta seção transversal com momento de inércia  $I = 2.9 \text{ m}^4$ , módulo de elasticidade longitudinal  $E = 2.87 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , comprimento  $L = 25 \text{ m}$ , massa da ponte distribuída  $\bar{m} = 2303 \text{ kg/m}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ , massa do veículo  $m_v = 5750 \text{ kg}$ , coeficiente de rigidez da mola  $k_v = 1595 \times 10^3 \text{ N/m}$ , velocidade do veículo  $v = 100 \text{ km/h}$ , frequência natural do veículo  $\omega_v = 2.65 \text{ Hz}$ . A primeira frequência natural da ponte é  $\omega_b = 4.77 \text{ Hz}$ . O amortecimento não é considerado no problema.

A análise dinâmica foi realizada utilizando o algoritmo HHT disponível no software ABAQUS™. A ponte foi modelada por meio de 30 elementos de viga tipo BEAM B23 (duas dimensões com função de interpolação cúbica). Para a massa pontual do veículo, utilizou-se o elemento tipo MASS e para simular a rigidez da mola, utilizou-se o elemento SPRING. A fim de garantir o acoplamento entre os dois subsistemas, foram impostas restrições de contato entre os elementos da ponte e o nó inferior da mola. O algoritmo MASTER-SLAVE para deslizamentos finitos (FINITE-SLIDING) foi aplicado para a solução do problema de contato. Utilizou-se o método de Lagrange Aumentado para imposição das restrições e a hipótese de contato severo (HARD CONTACT) foi adotada para modelagem da relação pressão de contato-interpenetração. O incremento de tempo  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$  foi atribuído para o procedimento

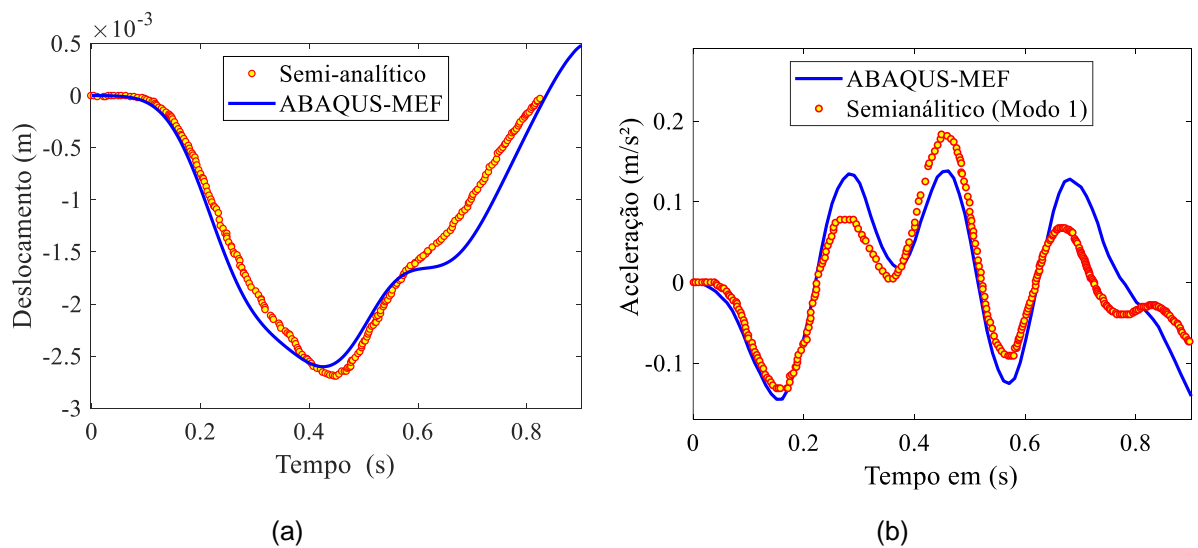
de integração implícita e, para remover os ruídos espúrios devido às altas frequências, aplicou-se às respostas um filtro digital *Butterworth* de 8ª ordem do tipo passa-baixa com frequência de corte de 60 Hz. As respostas dinâmicas para o nó central da ponte e para o nó que concentra a massa do veículo, em termos de deslocamentos e acelerações, obtidas no *software* ABAQUS™, são mostradas nas Figuras 4.8 e 4.9, respectivamente. Em todos os casos, os resultados também são comparados aos obtidos a partir da solução semi-analítica de Biggs (1964), a qual considera somente o contributo do 1º modo de vibração da estrutura.

Figura 4.8 - Resposta dinâmica da ponte no ponto central do vão: (a) Deslocamentos; (b) Acelerações



Fonte: O Autor

Figura 4.9 - Resposta dinâmica para o veículo: (a) Deslocamentos b) Acelerações

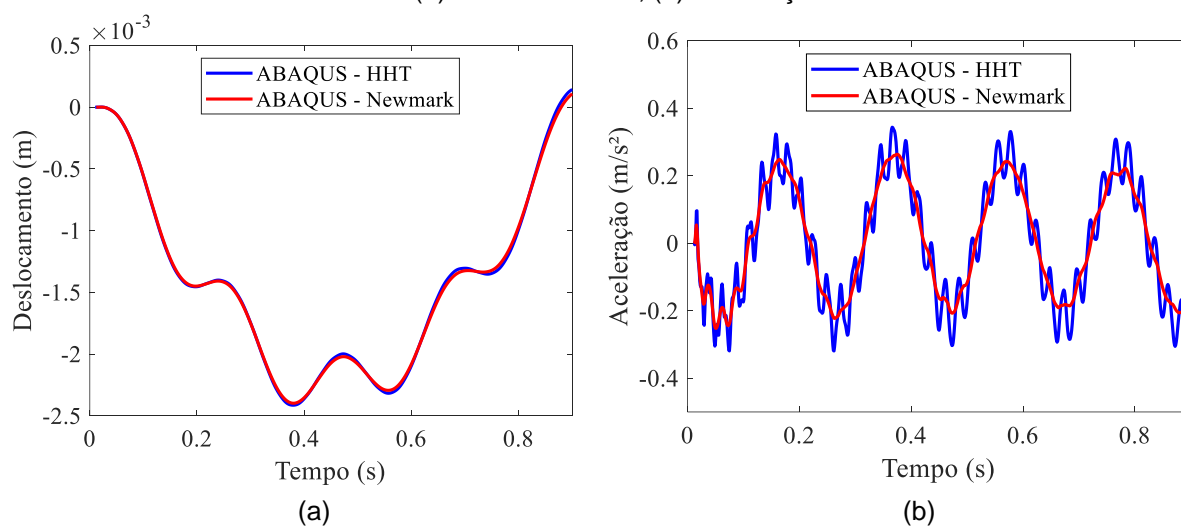


Fonte: O Autor

Diferentemente da solução analítica proposta por Yang *et al.* (2005), a solução semi-analítica apresenta divergências comparadas às respostas do modelo numérico. As diferenças ficam evidentes nas respostas dinâmicas para o veículo e para a ponte em função da aceleração. Isso ocorre porque na solução semi-analítica, apenas um modo de vibração é considerado para obtenção da resposta dinâmica, negligenciando assim o efeito dos demais modos de vibrações, com frequências mais elevadas. A similaridade das respostas para o deslocamento da ponte na seção central do vão pode ser justificada pelo fato do primeiro modo de vibração em pontes isostáticas ser o mais importante para a resposta global. Nesse sentido, as derivadas do campo de deslocamento são grandezas mais sensíveis às perturbações locais.

A solução numérica obtida através do *software* ABAQUS utilizou o algoritmo HHT. A fim de avaliar a solução da equação do movimento do problema pelo método de *Newmark* no código ABAQUS, foi adotado o parâmetro  $\alpha = 0$ . As respostas dinâmicas para acelerações e deslocamentos verticais na seção central da ponte são mostradas nas figuras abaixo.

Figura 4.10 – Comparação entre os métodos HHT e *Newmark* para as respostas verticais no meio do vão: (a) Deslocamentos; (b) Acelerações



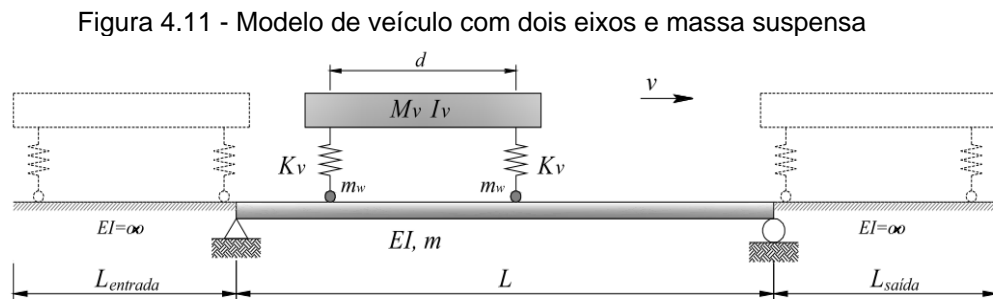
Fonte: O autor

Conforme mostrado nas figuras, percebe-se que a solução para os métodos de integração de *Newmark* e HHT são praticamente iguais para deslocamentos. No entanto, para a aceleração nota-se razoável diferença, uma vez que o método de *Newmark* não leva em consideração, durante a integração da equação do movimento, as frequências de ordem superior. Como pode ser observado, a solução para

aceleração utilizando o método de *Newmark* tem um comportamento semelhante à resposta dinâmica determinada pelo método semi-analítico, o qual leva em consideração apenas o modo fundamental de vibração.

#### 4.6 EXEMPLO 06: MODELAGEM DO VEÍCULO COM DUPLO EIXO

Nesta aplicação, considera-se uma viga simplesmente apoiada que interage com um veículo de 2 eixos separados por uma distância  $d$ , de acordo com o esquema mostrado na Figura 4.11. Essa configuração representa a suspensão primária (truque) de um veículo ferroviário convencional, conforme já descrito na seção 3.3. A viga estudada possui comprimento  $L = 30\text{m}$ , momento de inércia  $I = 2.88\text{ m}^4$ , massa por unidade de comprimento  $m = 1.2 \times 10^4\text{ kg/m}$ , módulo de elasticidade  $E = 29.43\text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.2$ , massa do veículo  $M_v = 1.8 \times 10^5\text{ kg}$ , inércia rotacional do veículo em torno de seu centroide  $I_v = 4.6 \times 10^6\text{ Kg m}^2$ , coeficiente de rigidez da mola  $K_v = 13783\text{ kN/m}$ , velocidade  $v = 100\text{ km/h}$  e primeira frequência natural da ponte  $\omega_b = 4.64\text{ Hz}$ .

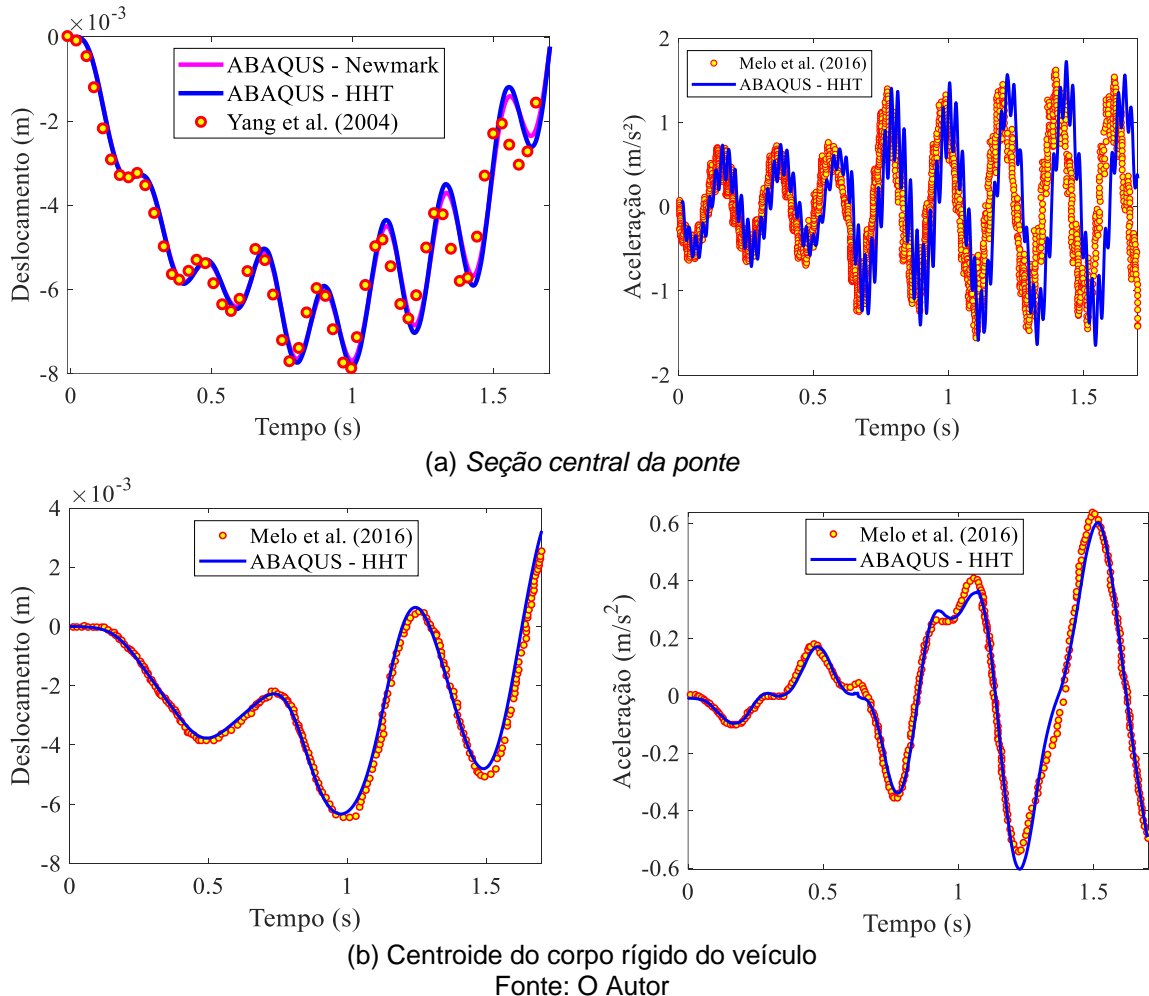


Fonte: Ticona Melo (2017)

O *chassis* do veículo foi modelado no *software* ABAQUS™ como um corpo rígido, utilizando um elemento rígido plano de 2 nós do tipo RB2D2. A massa do veículo foi aplicada no centroide do corpo rígido através do elemento do tipo *MASS* e, para simular a rigidez da mola, utilizaram-se elementos do tipo *SPRING*. As molas da suspensão foram conectadas ao corpo rígido utilizando restrições do tipo *TIE*. A ponte modelada com 10 elementos de viga do tipo *BEAM* B23. Foram introduzidas vigas de transição no início e no final da ponte a fim de simular o trecho rígido da via (ver Figura 4.11) que suporta o veículo antes da entrada e a após à saída da viga. As vigas de transição foram modeladas por meio de barras rígidas continuamente apoiadas. Para

garantir o acoplamento entre os dois subsistemas, foram impostas restrições de contato entre os elementos da ponte e o nó inferior da mola. O algoritmo *MASTER-SLAVE* para deslizamentos finitos (*FINITE-SLIDING*) foi aplicado para a solução do problema de contato. Utilizou-se o Método da Rigidez de Penalização (*Penalty Method*) para simular as interações de contato molas-vigas de transição e molas-ponte. O incremento de tempo  $\Delta t = 0.001\text{ s}$  foi atribuído para o procedimento de integração implícita HHT e, para remover os ruídos espúrios devido às altas frequências, aplicou-se às respostas um filtro digital *Butterworth* de 8ª ordem do tipo passa-baixa com frequência de corte de 70 Hz. As respostas dinâmicas na seção central da ponte e no centroide do corpo rígido do veículo são apresentadas, respectivamente, nas Figuras 4.12a e 4.12b. Nas figuras, mostram-se os resultados da modelagem em elementos finitos comparados a alguns resultados documentados na literatura para o mesmo problema (YANG et al., 2004, TICONA MELO et al., 2016).

Figura 4.12 - Respostas dinâmicas: (a) para a seção central da ponte; (b) para o ponto localizado no centroide do veículo.



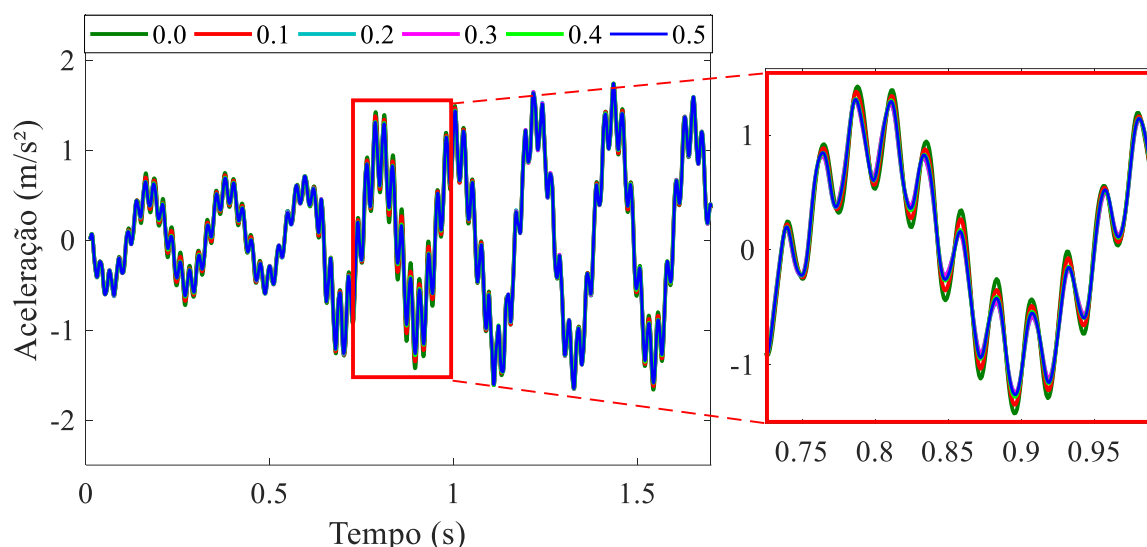
Os resultados mostram que há concordância entre as respostas dinâmicas simuladas e aquelas documentadas por Ticona Melo et al. (2016) e Yang et al. (2004). As divergências existentes estão relacionadas, entre outros aspectos, aos erros gerados durante a extração dos dados a partir da literatura, uma vez que não se teve acesso diretamente aos dados originais, e às diferenças inerentes às metodologias distintas. Vale ressaltar, também, que os resultados descritos por Ticona Melo (2016) foram obtidos considerando a modelagem desacoplada dos subsistemas ponte e veículo.

## 5.7 INFLUÊNCIA DOS ALGORITMOS DE CONTATO NO PROBLEMA DE INTERAÇÃO VEÍCULO-PONTE

Durantes as modelagens numéricas em elementos finitos utilizando o *software* ABAQUS™, identificaram-se pequenas perturbações, especialmente nas respostas dinâmicas em termos de acelerações, com relação às soluções analíticas. Na discretização nó-superfície para deslizamentos finitos, as interações de contato são impostas definindo uma superfície “mestre” (*MASTER*) e nós “escravos” (*SLAVES*). Nesta formulação, o programa calcula todos os nós das superfícies *MASTER* e *SLAVE* em contato, definindo uma área de contato para imposição das restrições (ABAQUS,2016). O contato é estabelecido em um nó particular na superfície *SLAVE* e em um ponto de projeção na superfície *MASTER* através de um vetor normal a esta. O algoritmo aplica um fator de suavização, que varia de 0.0 a 0.5, o qual funciona como um filtro para eliminar os ruídos numéricos, que surgem em virtude das fortes não linearidades associadas às descontinuidades que caracterizam o problema.

Com a finalidade de verificar a influência do fator de suavização na resposta dinâmica da estrutura, foi realizada uma análise de sensibilidade considerando o Exemplo 06. A resposta dinâmica para a seção central da ponte, em função desse fator, é mostrada na Figura 4.13. Verifica-se que o respectivo efeito tem maior influência nas respostas de aceleração, embora não tenha se mostrado significativo, uma vez que as não se verifica diferenças notórias entre as curvas. Isso mostra que, para o exemplo estudado, este não é um parâmetro determinante para obtenção da resposta de interesse.

Figura 4.13 - Resposta dinâmica no meio do vão da viga do Exemplo 06, considerando diferentes coeficientes de suavização para aceleração



Fonte: Autor

Além da definição dos pares de contato *MASTER-SLAVE*, na análise em elementos finitos também é necessário definir um método para imposição das restrições. O *software* ABAQUS possui três algoritmos para este tipo de definição: o *Método Direto*, o *Método da Rigidez de Penalização* e o *Método Lagrangeano Aumentado*. (ABAQUS, 2016).

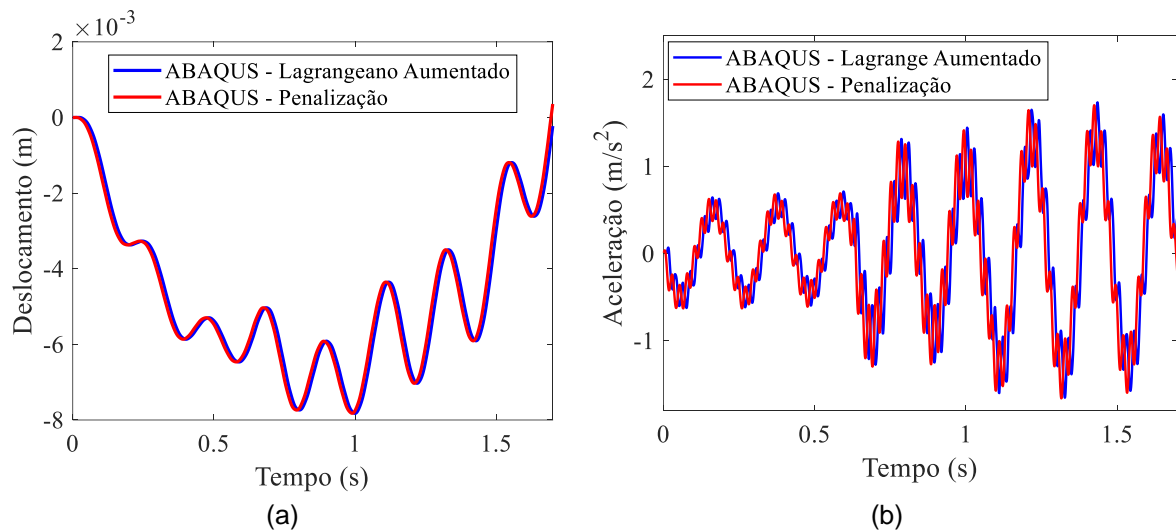
No método da *Rigidez de Penalização*, é considerada a condição de interpenetração entre as superfícies de contato, de modo que a pressão de contato é proporcional à profundidade de interpenetração. Esse grau de penetração é corrigido no programa por uma rigidez de penalização que é escolhida automaticamente pelo *software* em função da rigidez elástica dos elementos no entorno da interface, na superfície *MASTER*. Dessa forma, o método simula uma aproximação rígida do contato (ABAQUS, 2016). Quando a rigidez de penalização tende ao infinito, a relação pressão de contato-interpenetração tende para o contato severo (*HARD CONTACT*), onde a interpenetração é nula.

O método dos *Lagrange Aumentado* é idealizado para impor uma aproximação melhorada à condição de contato severo. O algoritmo inicia as interações aplicando o método da *Rigidez de Penalização* e, uma vez alcançado o equilíbrio, a interpenetração é checada diante de uma tolerância. Se a verificação não for atendida,



multiplicadores de *Lagrange* são usados em uma série subsequente de iterações até encontrar convergência na solução (TEIXEIRA, 2015). A Figura 5.14 mostra os resultados, em termos de deslocamentos e acelerações no meio do vão, para a viga do Exemplo 06, considerando os dois algoritmos descritos.

Figura 4.14 -Respostas dinâmicas no meio do vão da viga do Exemplo 06, considerando diferentes algoritmos de contato: (a) Deslocamentos (b) Acelerações.



Fonte: O Autor

Os resultados mostram uma boa concordância entre as respostas para deslocamentos e acelerações, o que evidencia que ambos os algoritmos são eficientes para o problema de interação. No entanto, é oportuno ressaltar que o método *Lagrangeano* aumentado apresenta um custo computacional significativamente maior, devido à utilização das iterações aumentadas geradas pela aplicação dos multiplicadores de *Lagrange* para melhorar a aproximação com relação ao contato severo.

#### 4.8 COMPARAÇÃO DAS RESPOSTAS DINÂMICAS COM ELEMENTOS SÓLIDOS E ELEMENTOS DE VIGA NO PROBLEMA DE INTERAÇÃO VEÍCULO-PONTE

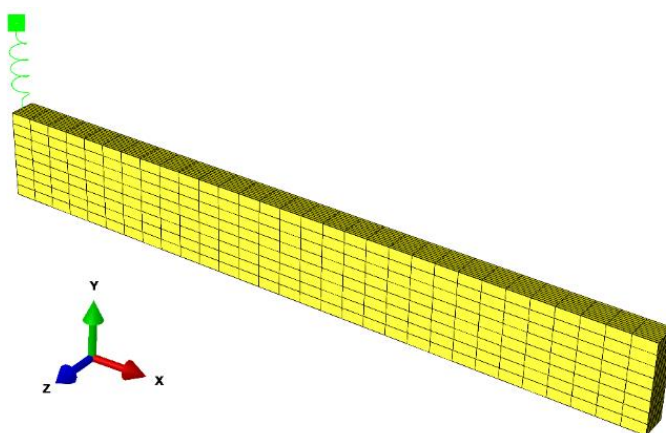
O software ABAQUS possui elementos sólidos hexaédricos com integração total, com integração reduzida e elementos de modo incompatível (ABAQUS, 2016). Os elementos sólidos de 8 e 20 nós com integração reduzida (C3D8R e C3D20R) são altamente eficientes, mas possuem tolerância às distorções. Por esse motivo, pode ocorrer nestes elementos o efeito “ampulheta” causado pela instabilidade da malha devido ao surgimento de modos espúrios de deformação nula, provocando

perturbações não físicas no sólido. Desta forma, para esses elementos, é necessário o uso de malhas finas ao longo das três dimensões espaciais, a fim de garantir precisão na solução do problema.

Os elementos sólidos totalmente integrados de 8 nós (C3D8) conduzem à boa precisão, mas são muito rígidos para problemas de flexão pura. Já os elementos de modo incompatível (C3D8I) apresentam boa precisão e pouca sensibilidade ao refinamento da malha, no entanto, são muito sensíveis às distorções. (ABAQUS,2016).

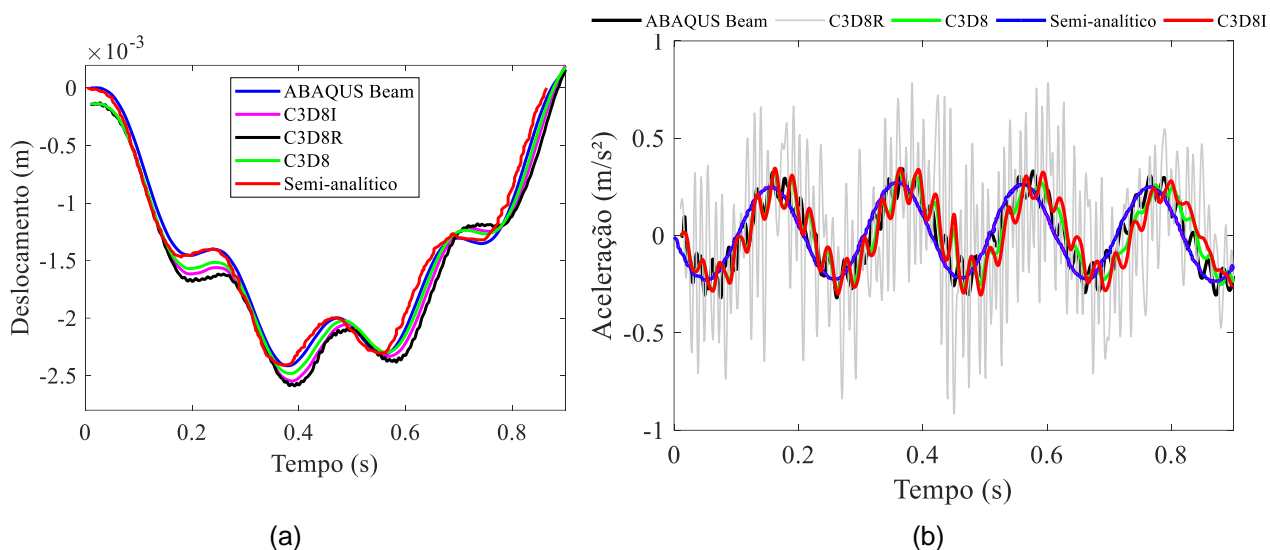
A fim de avaliar a influência dos elementos sólidos hexaédricos C3D8R, C3D8 e C3D8I na análise dinâmica com interação veículo-ponte, o problema do Exemplo 05 foi modelado e as respostas foram comparadas com as obtidas a partir do modelo com elementos de viga. As propriedades da estrutura, veículo e definições de contato são as mesmas adotadas no modelo do Exemplo 05. Neste caso, o coeficiente de suavização utilizado é igual a 0.2, sendo este o padrão do *software* ABAQUS. Em todos os casos, as respostas foram obtidas com a aplicação de um filtro digital passa-baixa tipo *Butterworth* de 8ª ordem com frequência de corte de 60Hz. A viga foi modelada com 2400 elementos sólidos hexaédricos, conforme ilustrado na Figura 4.15, abaixo. A Figura 4.16 mostra a comparação entre os deslocamentos e acelerações correspondentes aos diferentes tipos de elementos usados na modelagem. Também são mostradas na figura as respostas obtidas com base no método semi-analítico de Biggs (1964).

Figura 4.15 - Modelo em sólido do problema do Exemplo 05.



Fonte: O autor

Figura 4.16 – Comparação entre os resultados na seção central da viga do Exemplo 05, considerando diferentes tipos de elementos: (a) Deslocamentos; (b) Acelerações



Fonte: O Autor

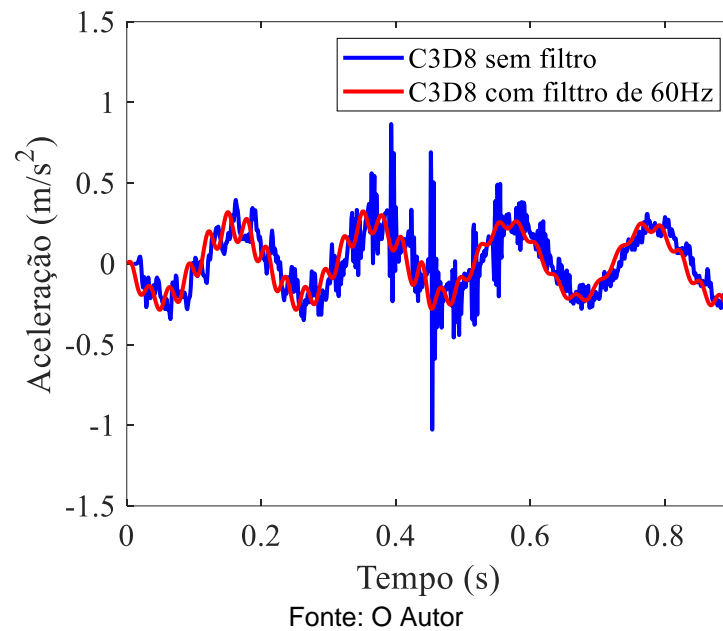
Como pode ser observado na figura 4.16, há relativa concordância entre os deslocamentos obtidos com elementos de viga e os obtidos com elementos sólidos C3D8. As diferenças percebidas são maiores quando são comparadas as respostas com elementos de viga e as verificadas com elementos C3D8R. Uma possível explicação para este comportamento pode estar relacionada ao fato de que os modelos com elementos sólidos conseguem capturar as distorções por cisalhamento da viga, as quais não são levadas em consideração nos elementos de viga e na formulação semi-analítica do problema.

Para aceleração, observa-se uma grande diferença, mesmo após a passagem do filtro passa-baixa, com relação ao modelo com elemento C3D8R quando são comparados os resultados dos modelos com os outros elementos, o que demonstra a baixa precisão do procedimento de integração reduzida para o problema. A aplicação de um outro filtro com uma frequência de corte abaixo de 60Hz seria uma possível maneira de contornar essa situação, onde prevalece a influência espúria devido às frequências de alta ordem.

Com o objetivo de mostrar a influência do filtro para remoção das frequências de ordem superior nos registros de aceleração, é mostrada na Figura 4.17 a resposta

obtida para o elemento C3D8 após a aplicação do filtro passa-baixa com frequência de corte de 60 Hz. A resposta filtrada, neste caso, é a mesma já mostrada na Figura 4.16 para o modelo com o referido elemento.

Figura 4.17- Comparação entre as respostas com e sem filtro para as acelerações na seção central da viga do Exemplo 05



## 5 ANÁLISE DINÂMICA DA PONTE SUAÇUÍ

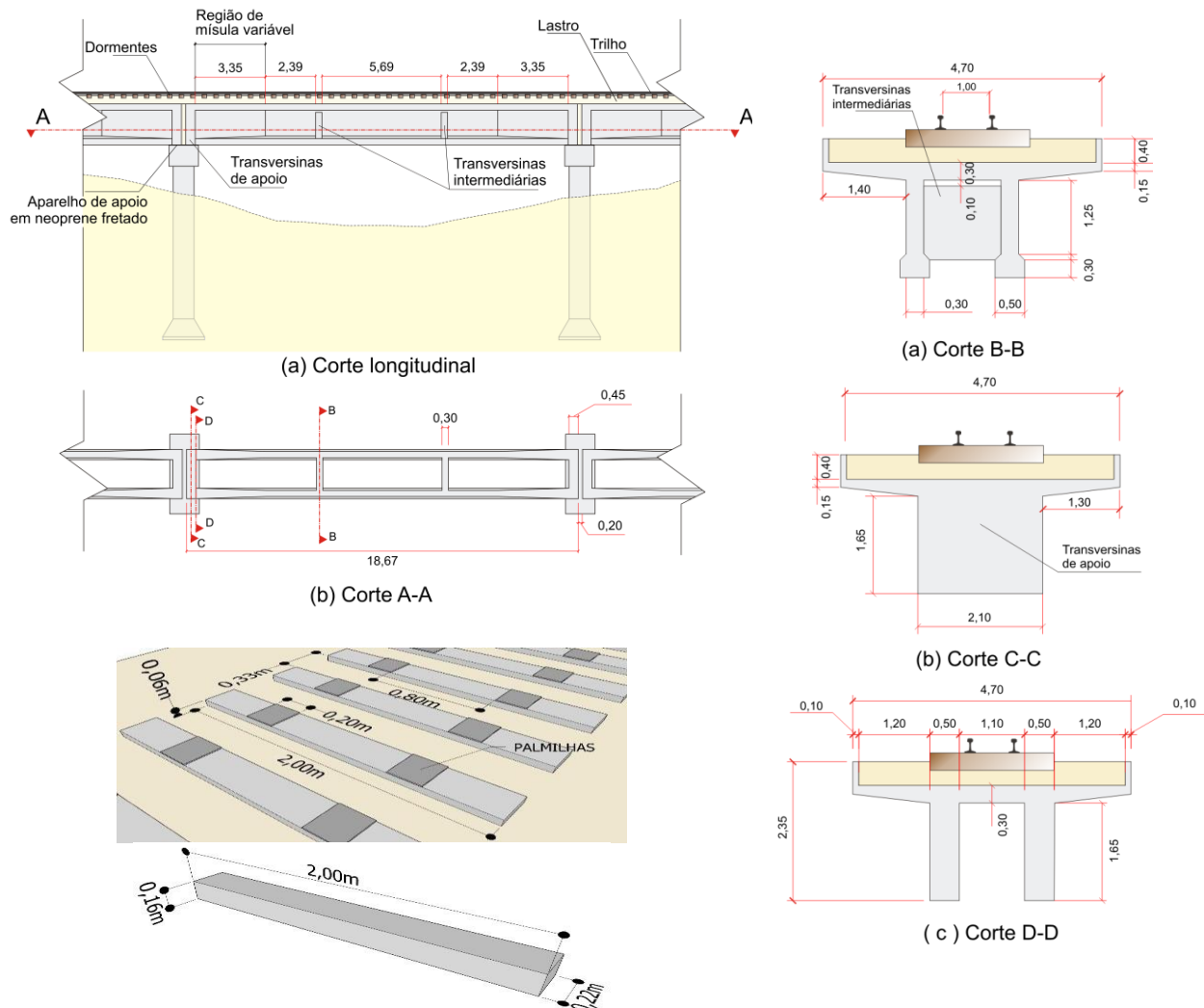
### 5.1 DESCRIÇÃO DA PONTE

A ponte ferroviária sobre o rio Suaçuí está localizada da Estrada de Ferro Vitória-Minas próximo à cidade de Governador Valadares-MG. A estrutura possui comprimento total de 67.82 m, sendo o comprimento da superestrutura de 54.77 m, dividido em três vãos isostáticos de 18.67 m cada. A superestrutura é constituída de lajes maciças dispostas sobre duas vigas paralelas longitudinais. As vigas longitudinais possuem uma mísula inferior na região onde se concentra a armadura de flexão, sendo que, nos trechos próximos aos apoios, a alma da seção tem sua largura aumentada. As longarinas são apoiadas nos encontros com o auxílio de aparelhos de apoio metálicos com almofadas em *Neoprene* fretado. A via é composta por dormentes de madeira com trilhos TR-68 distantes em bitola métrica e fixados nos dormentes através de palmilhas de aço, as quais assentam-se sobre uma camada de lastro com espessura de 40 cm. A geometria da estrutura e detalhes da via pode ser observada na Figura 5.1, abaixo (AMARAL *et al.*, 2020). A descrição detalhada da estrutura, das campanhas de inspeções e do projeto estrutural da ponte pode ser consultada no relatório desenvolvido por Bittencourt *et al.*, (2011).

### 5.2 ESTUDO EXPERIMENTAL E PROPRIEDADES MECÂNICAS

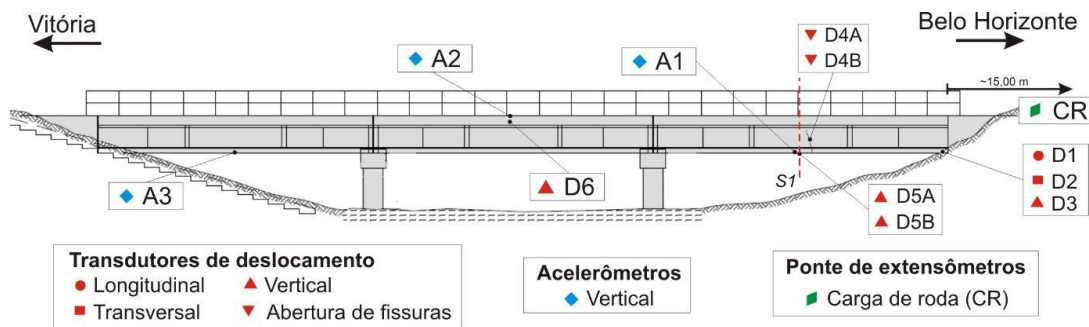
O relatório desenvolvido por Bittencourt *et al.*, (2011) descreve os testes de campo de curta duração realizados para verificação da integridade estrutural da ponte sobre o Rio Suaçuí. Durante o monitoramento, deflexões foram registradas por transdutores de deslocamentos posicionados nas direção vertical no meio do vão. Também foram medidos os deslocamentos relativos na direção longitudinal, vertical e transversal de um dos aparelhos de apoio. Acelerômetros piezoelétricos foram utilizados para a medição de acelerações e determinação de características dinâmicas de interesse, nos domínios do tempo e das frequências. As deformações nos elementos estruturais foram medidas por meio extensômetros elétricos de resistência (BITTENCOURT *et al.*, 2011). Um esquema de uma parte da instrumentação da estrutura é mostrado na Figura 5.2.

Figura 5.1 - Geometria da ponte Suaçuí, detalhes da via e cortes do vão central



Fonte: Amaral *et al.*, (2020) e Bittencourt *et al.*, (2011)

Figura 5.2 – Esquema com parte da instrumentação da ponte sobre o Rio Suaçuí

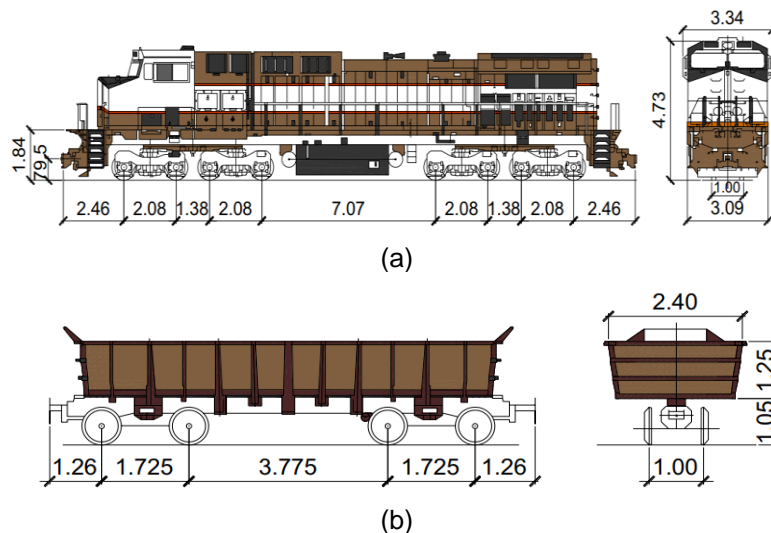


Fonte: Adaptado de Bittencourt *et al.* (2011)

O monitoramento foi realizado sob ação do tráfego em velocidade operacional. Entre as composições monitoradas, registrou-se o trem de minério carregado composto por 2 Locomotivas DASH 9W + 168 vagões GDE carregados. Esse corresponde ao veículo ferroviário mais frequente na ferrovia. As características

geométricas da locomotiva DASH-9W e vagões GDE e dados das cargas nominais de cada veículo do respectivo trem são apresentados na Figura 5.3 e na Tabela 5.1.

Figura 5.3 - Dados geométricos dos veículos que compõem o trem de minério: (a) Locomotiva DASH-9W; (b) Vagão GDE



Fonte: Ticona Melo *et al.*, (2018)

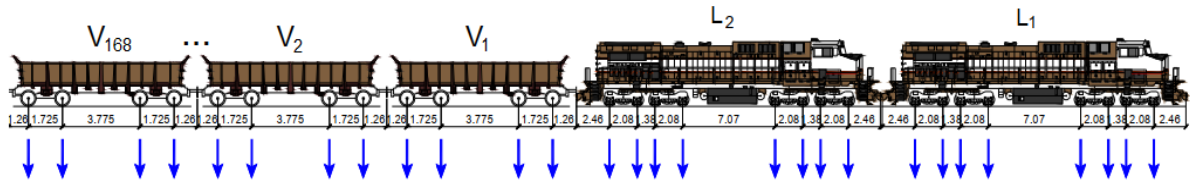
Tabela 5.1- Carregamentos nominais para os veículos ferroviários do trem de minério carregado

Veículo	Carga total (kN)	Tara (kN)	Carga Nominal/Eixo P(kN)	Densidade da carga (kN/m)
DASH 9W	1600	-	200	69.32
GDE	960	165	240	98.46

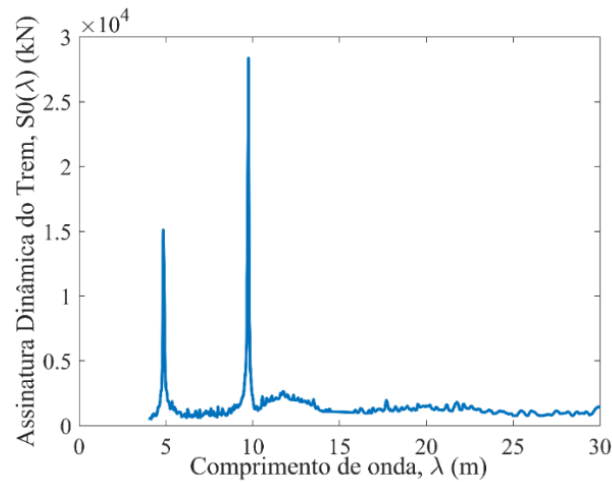
Fonte: Ticona Melo *et al.*, (2016)

A partir das características geométricas da locomotiva e do vagão, pode se obter a assinatura dinâmica do veículo através da equação (2.73), que representa como o trem excita a ponte. A Figura 5.4a mostra a representação das locomotivas e vagões, com suas respectivas distâncias entre cargas, e a assinatura dinâmica do trem de minério para comprimentos de onda entre 0 e 30 m. Ressalta-se que a assinatura dinâmica mostrada na Figura 5.4b foi obtida considerando o trem de minério a 56.77 km/h com cargas registradas por meio do medidor de cargas/roda instalado nos trilhos a aproximadamente 15 m antes da entrada da ponte (ver Figura 5.2). Tais valores detectados experimentalmente são mostrados na Figura 5.5, extraída de AMARAL *et al.*, 2020).

Figura 5.4 – (a) Trem de minério com duas locomotivas e vagões GDE; (b) Assinatura Dinâmica obtida com base em dados experimentais de carga/roda.



(a)



(b)

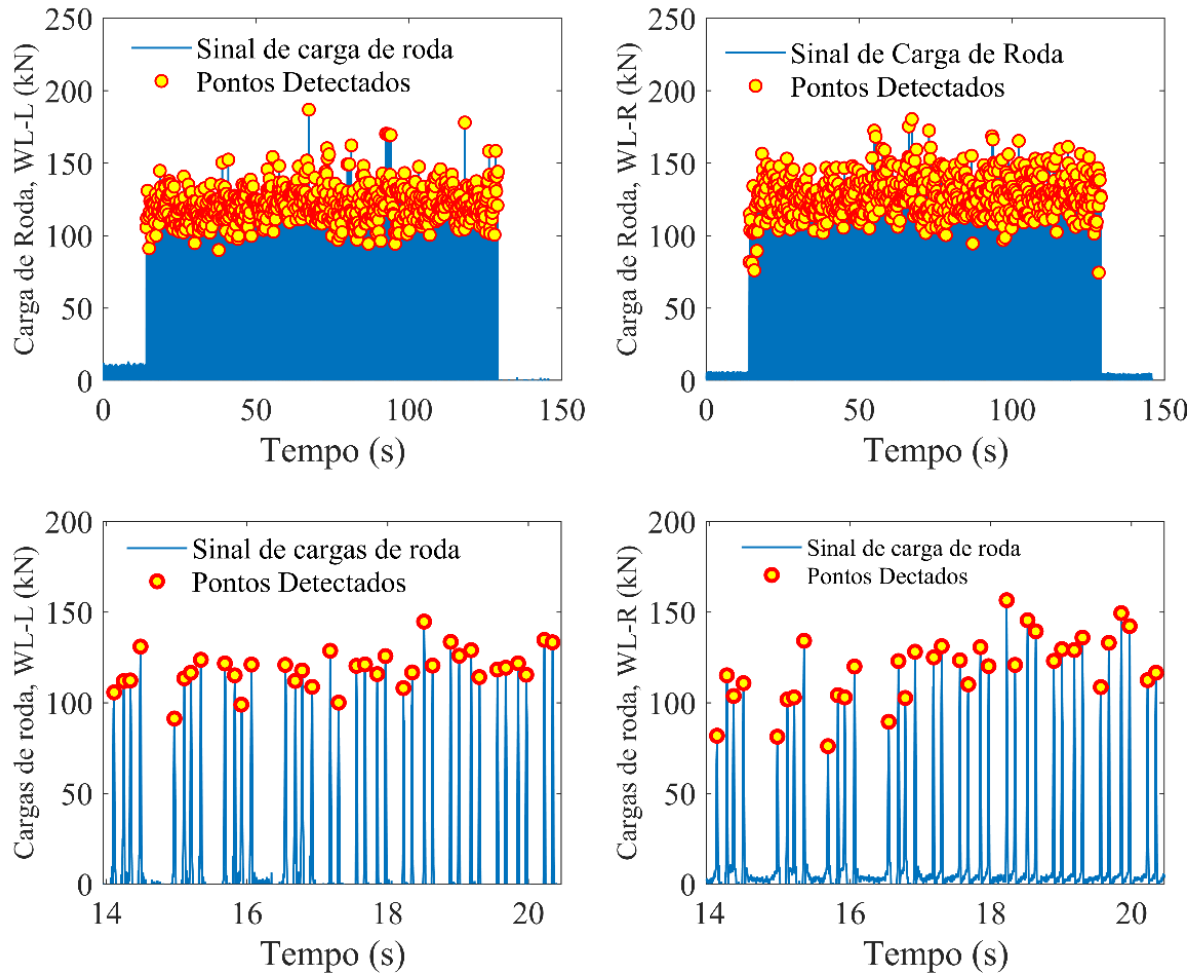
Fonte: (a) Adaptado de Ticono Melo (2017); (b) O Autor

A assinatura dinâmica expressa na Figura 5.4b mostra que os comprimentos de onda mais excitados são de, aproximadamente, 4.85 m e 9.75 m. O primeiro é referente a distância entre o último truque de um vagão e o primeiro do outro ( $3.775 \text{ m} + 1.725 \text{ m} = 5.5 \text{ m}$ ). O segundo comprimento de onda é referente à distância média entre os centros dos grupos de eixos dos vagões GDE ( $3.775 \text{ m} + 2 \times 1.725 \text{ m} + 2 \times 1.26 \text{ m} = 9.745 \text{ m}$ ). Uma estimativa da frequência de excitação da ponte pode ser obtida fazendo-se  $f = v / \lambda$ . Dessa forma, para uma velocidade operacional de 60 km/h, os valores das frequências de excitação da ponte para os comprimentos de onda de 4.85 m e 9.75 m são em torno de, respectivamente, 3.43 Hz e 1.71 Hz.

Nas análises dinâmicas apresentadas neste trabalho, as respostas da estrutura foram obtidas considerando uma composição com apenas duas locomotivas frontais DASH-9W seguidas por cinco vagões GDE carregados. As cargas/roda adotados para o trem, destacando os 36 primeiros eixos, são mostradas na Figura 5.5.



Figura 5.5 - Cargas de rodas direita (WL-R) e esquerda (WL-L) registradas em monitoramento para o trem de minério carregado a 56.77 km/h e usadas para o modelo numérico da ponte.



Fonte: Adaptado de Amaral *et al.*, (2020)

A Tabela 5.2 apresenta as propriedades mecânicas usadas para a elaboração do modelo numérico, adaptadas com base no trabalho de Amaral *et al.*, (2020). A maioria das propriedades foram consultadas ou determinadas com base em formulações encontradas na literatura, com exceção do módulo de elasticidade e densidade do concreto, cujos valores foram determinados através de ensaio ultrassom realizados *in situ* e em corpos de provas extraídos da ponte (BITTENCOURT *et al.*, 2011).

Tabela 5.2-Propriedades mecânicas adotadas no modelo numérico da ponte

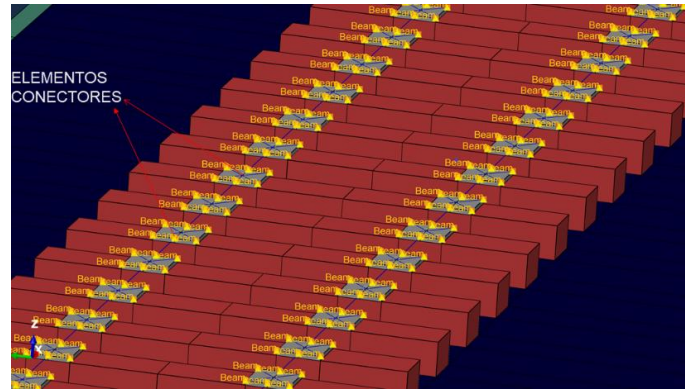
Designação	Valor adotado	Referência
Densidade do concreto (kg/m <sup>3</sup> )	2360.0	(BITTENCOURT et al., 2011)
Módulo de elasticidade do concreto (GPa)	31.67	(BITTENCOURT et al., 2011; AMARAL et al., 2020)
Coefficiente de Poisson do concreto	0.2	(AREMA, 2013)
Densidade do lastro (kg/m <sup>3</sup> )	1885.0	(RIBEIRO et al., 2012; TICONA MELO et al., 2019)
Coefficiente de Poisson do lastro	0.2	
Módulo de Elasticidade do lastro (MPa)	130.0	
Módulo de elasticidade da palmilha (GPa)	200	(AREMA, 2013)
Densidade do aço (kg/m <sup>3</sup> )	7850	(AREMA, 2013)
Módulo de elasticidade do aço (GPa)	200	
Coefficiente de Poisson do aço	0.3	
Densidade da madeira (kg/m <sup>3</sup> )	855.24	(PFEIL; PFEIL, 2003)
Módulo de elasticidade da madeira (GPa)	15.80	
Coefficiente de Poisson da madeira	0.4	(Adam et al., 2012)
Densidade do aparelho de apoio (kg/m <sup>3</sup> )	1210	(PAULO et al., 2005; PINHO et al., 2005)
Módulo de elasticidade do aparelho de apoio (GPa)	0.73	(DIN, 1984; CARDOSO; LIMA, 2017)
Coefficiente de Poisson do aparelho de apoio	0.4985	(YAZDANI et al., 2000)

Fonte: Adaptado de Amaral et al., (2020)

### 5.3 MODELO NUMÉRICO EM ELEMENTOS FINITOS

Um modelo numérico tridimensional foi desenvolvido no *software* ABAQUS™ com base nos dados de projeto, e propriedades mecânicas apresentadas na Tabela 5.2. O modelo consiste em uma malha de elementos finitos sólidos cúbicos hexaédricos de interpolação linear e integração reduzida C3D8R, com exceção dos trilhos que foram modelados com elementos de viga de dois nós com interpolação linear (tipo BEAM-B31). A ligação entre as palminhas e as barras do trilho foi estabelecida com elementos conectores CONN3D2 tipo BEAM fixados entre os nós coincidentes para restringir todos os graus de liberdade de translação e rotação, o que equivale a assumir o comportamento de barra rígida. As interfaces estrutura-lastro, dormentes-lastro, palminhas-dormentes e aparelho de apoio-estrutura, foram modeladas aplicando restrições de deslocamentos (*constraints*) do tipo *TIE*, com a finalidade de acoplar todos os componentes sem permitir qualquer deslocamento relativo entre as superfícies. Na Figura 5.6 abaixo mostram-se detalhes da malha da via, destacando a camada de lastro, dormentes, trilhos e palminhas.

Figura 5.6 - Detalhes da modelagem da via

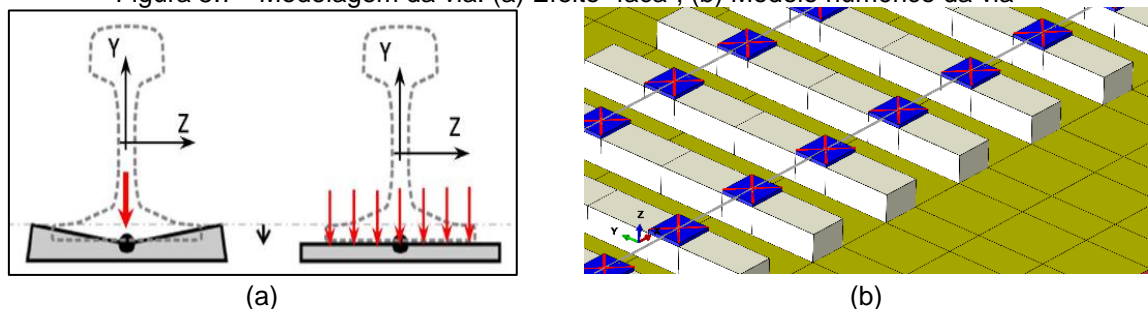


Fonte: O Autor

As palmilhas possuem dimensões 0.02 m x 0.20 m x 0.22 m e foram modeladas com elementos sólidos C3D8R. Cada palmilha foi discretizada com dois elementos no plano horizontal e um elemento ao longo da espessura. Os trilhos foram modelados por elementos de viga dispostos no centro de gravidade de modo a simular o efeito real das distribuições de cargas aos dormentes. Foram atribuídos conjuntos de nós (*nodesets*) para receber as funções temporais de amplitudes de forças que simulam as cargas móveis, conforme metodologia já descrita na seção 2.

Na modelagem das palmilhas, é importante impedir o efeito “faca” causado pelo elemento de viga disposto no eixo longitudinal que passa pelo centro de cada placa, uma vez que esse efeito não é verificado na realidade, em virtude de o trilho ter sua base apoiada uniformemente sobre as palmilhas (FERNANDES, 2010). O surgimento desse comportamento no modelo é consequência da ausência de graus de liberdade de rotação do elemento sólido. Deste modo, para o presente modelo numérico, utilizou-se sobre as palmilhas barras rígidas dispostas na diagonal, a fim de simular de forma mais realista a transferência das cargas verticais. O referido efeito e a estratégia de modelagem são mostrados na Figura 5.7.

Figura 5.7 - Modelagem da via: (a) Efeito “faca”; (b) Modelo numérico da via



Fonte: (a) Fernandes (2010); (b) O autor

Os dormentes foram modelados com seis elementos sólidos ao longo do comprimento. A camada de lastro também foi modelada com elementos sólidos, apenas um elemento ao longo da espessura. Para a modelagem da estrutura, foi necessária a realização de inúmeras partições de geometria para atribuir a malha hexaédrica, uma vez que a ponte apresenta uma geometria irregular em algumas zonas da estrutura. Esse procedimento é importante para evitar distorções e a geração de malhas incompatíveis.

Um quantitativo das malhas utilizadas no modelo é apresentado na Tabela 5.3. No modelo, foram utilizados 6976 elementos para a malha da estrutura de concreto, 2320 elementos para a camada de lastro, 731 elementos para os dormentes, 244 elementos para as palmilhas, 24 elementos para cada aparelho de apoio e 1710 elementos de viga.

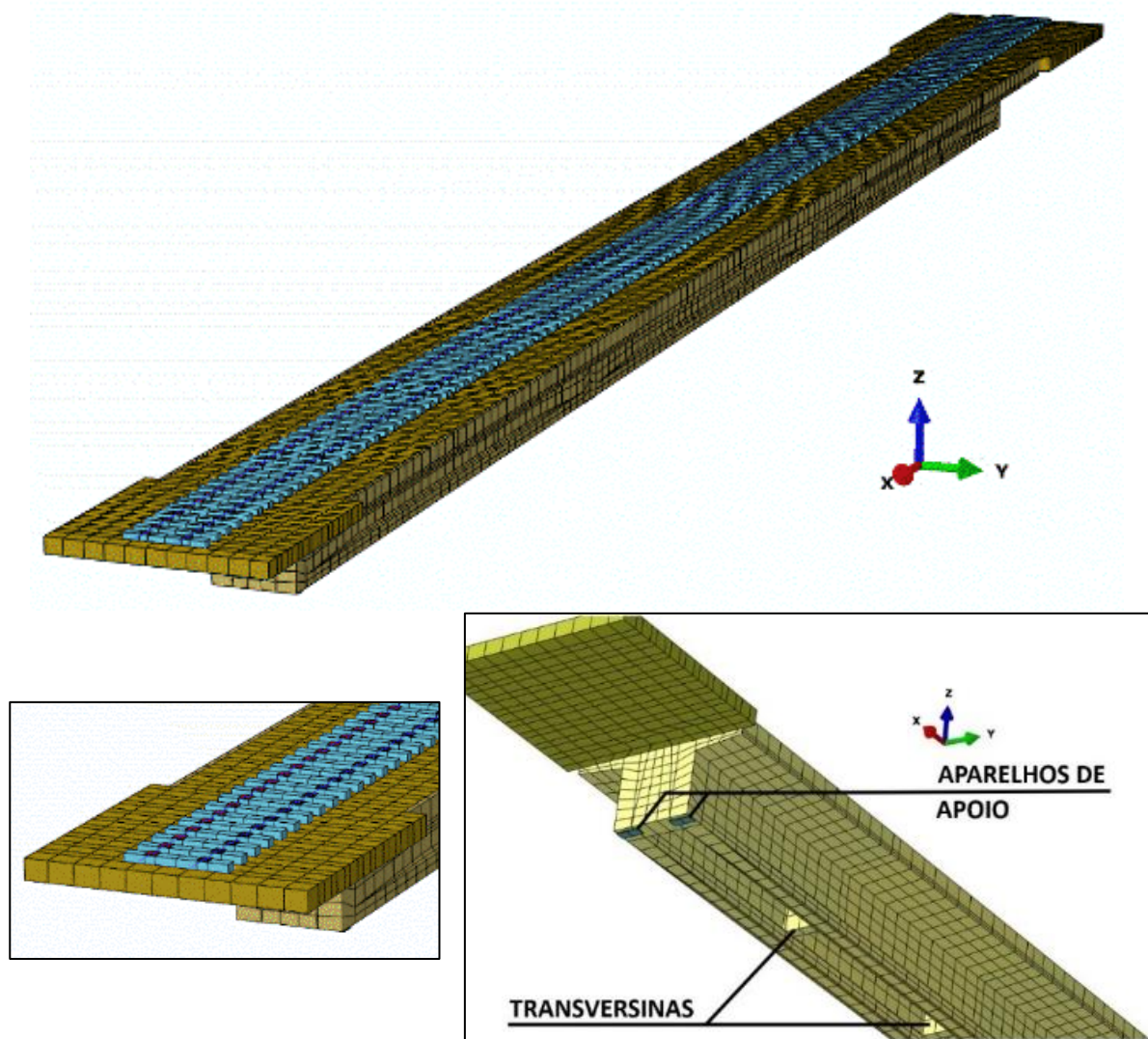
Tabela 5.3-Descrição dos elementos finitos utilizados no modelo

<b>Elemento</b>	<b>Tipo</b>	<b>Função de interpolação</b>	<b>Descrição</b>	<b>Quantidade</b>
B31	Viga	Linear	Elemento de viga de com dois nós	1710
C3D8R	Hexaédrico	Linear	Elemento contínuo sólido tridimensional com 8 nós, integração reduzida e controle de efeito "ampulheta"	10295
CONN3D2	Conector	Linear	Elemento conector tipo BEAM	1464
<b>TOTAL</b>				<b>13469</b>

Fonte: O Autor

Com a finalidade de impedir movimentos de translação e rotação, foram aplicadas condições de contorno de engastamento nas superfícies inferiores dos aparelhos de apoio e nas superfícies inferiores da camada de lastro prolongada nas extremidades da ponte. Também foram aplicados engastamentos nos nós das extremidades dos trilhos. Vistas parciais do modelo numérico 3D da ponte são mostradas na Figura 5.8.

Figura 5.8 – Vistas do modelo em elementos finitos da ponte sobre o Rio Suaçuí.



Fonte: O Autor

#### 5.4 CONSIDERAÇÃO DA VARIAÇÃO RIGIDEZ À FLEXÃO

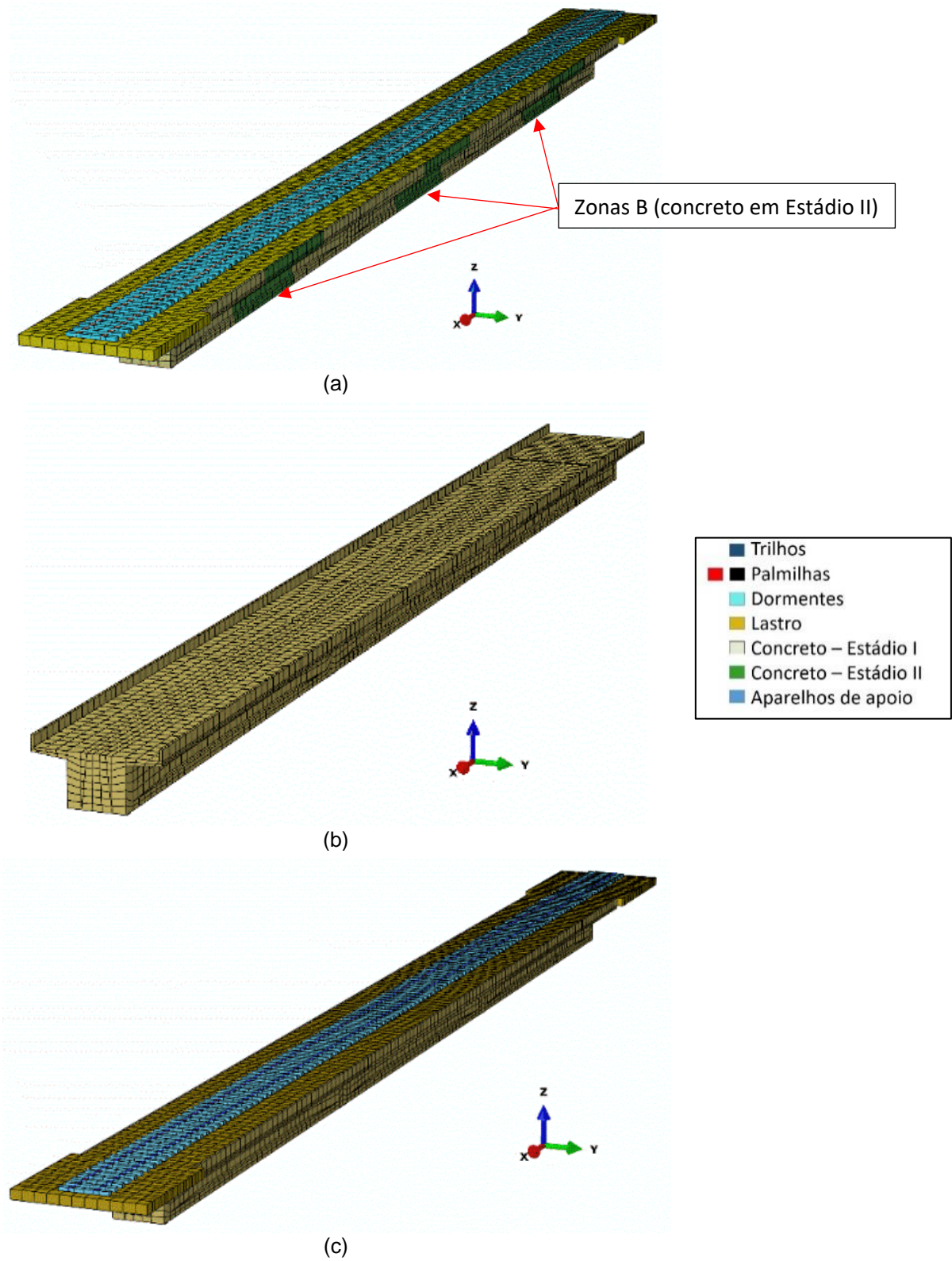
Durante o monitoramento da ponte sobre o rio Suaçuí, fez-se o levantamento do panorama de fissuração das vigas longitudinais. Como esperado, verificou-se uma concentração maior de fissuras nas regiões centrais dos vãos da ponte, aproximadamente no terço médio do comprimento (BITTENCOURT *et al.*, 2011). A fim de considerar, de forma simplificada, o efeito da fissuração do concreto e a perda de rigidez à flexão, fez-se a penalização do módulo de elasticidade do concreto, conforme procedimento descrito em (AMARAL *et al.*, 2020). A determinação do fator de penalização foi feita com base na relação *Momento x curvatura* da seção transversal central, a qual é a mesma na região entre as transversinas intermediárias.

O cálculo do fator de rigidez foi feito utilizando as rigidezes à flexão no estágio II (pós-fissuração) e no estágio I (seção bruta de concreto) utilizando os modelos constitutivos não lineares uniaxiais do concreto (parábola de *Hognestad*) e do aço (modelo elasto-plástico perfeito) implementados com a utilização das propriedades mecânicas obtidas experimentalmente (BITTENCOURT *et al.*, 2011; AMARAL *et al.*, 2020). A seção transversal da superestrutura, incluindo o par de longarinas e a laje de espessura variável nos balanços do tabuleiro, foi modelada no aplicativo *SAP2000 Section Designer®*. Todas as armaduras longitudinais que constam no projeto estrutural foram representadas no modelo. Diferentemente do procedimento descrito em Amaral *et al.*, (2020), o processo de calibração documentado na presente dissertação aplica a correção no modelo completo da superestrutura, composta de três vãos. Já no trabalho do referido autor, a calibração é feita somente em um vão, uma vez que a estrutura não foi inteiramente modelada.

Para corrigir a rigidez dos componentes da superestrutura, cada vão da ponte foi dividido em zonas que consideram a fissuração do concreto no estágio II (Zonas B) e zonas com o concreto no estágio elástico I (Zonas A). Foram construídos três modelos numéricos, o modelo *E-I* considera todos os elementos da via, os aparelhos de apoio e a estrutura da ponte. Neste modelo, não foi considerada a fissuração do concreto, admitindo seu comportamento no estágio I para toda a ponte. O segundo modelo, *E-I-SV*, apresenta as mesmas características do modelo *E-I*, com exceção da via. O terceiro modelo, *E-II*, é igual ao modelo *E-I*, no entanto, é considerada a correção da rigidez na zona central de cada vão, admitindo o comportamento do concreto armado no estágio II. A extensão de correção também é um parâmetro de calibração e foi escolhida de modo a, em conjunto com os demais parâmetros, minimizar via tentativa e erro, a diferença entre os deslocamentos verticais experimentais e numéricos ver figura 5.9. A distância central de 11.07 m, a qual corresponde ao trecho de seção constante com mesma composição de armadura, foi imposta como restrição de limite superior para a pesquisa da extensão da zona de correção. Neste sentido, nenhum procedimento de otimização foi utilizado, a exemplo do adotado em Ticona Melo (2016), para automatizar a busca por parâmetros de atualização do modelo.



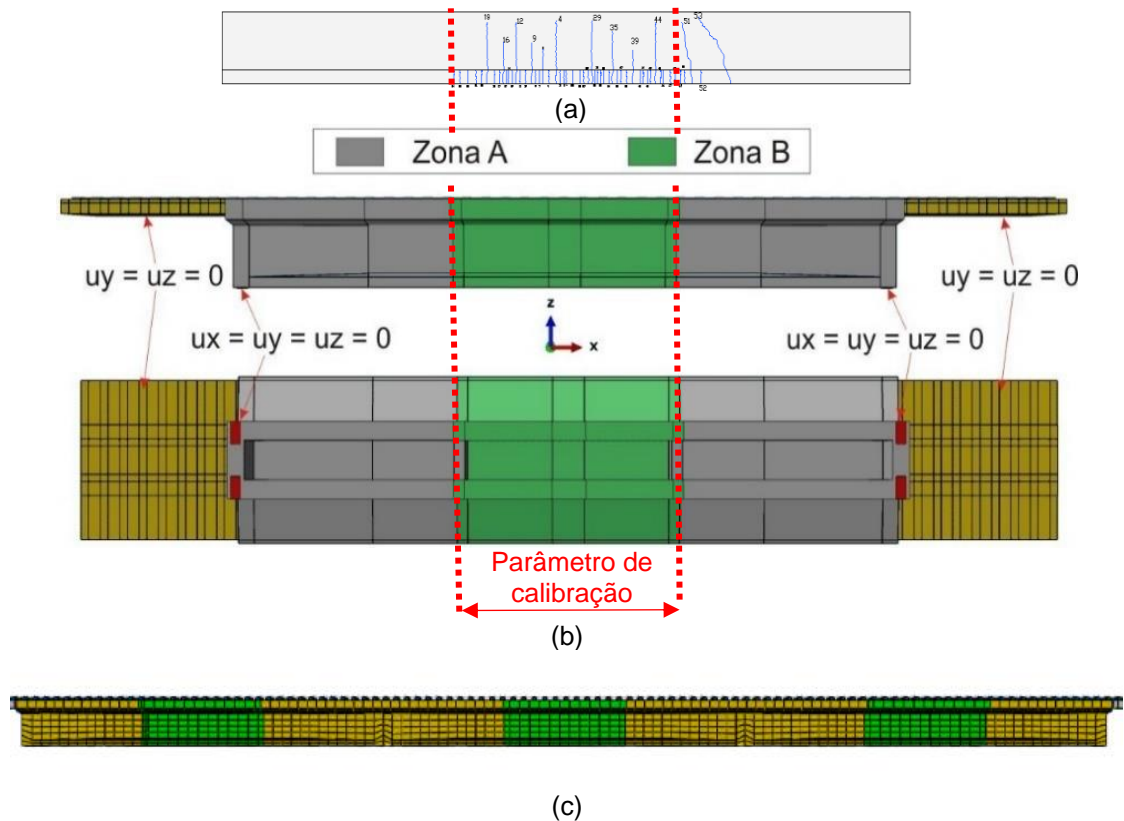
Figura 5.9 - Modelos numéricos com a inclusão de zonas com concreto em estágio II:  
(a) E-II; (b) E-I-SV; (c) E-I



Fonte: O Autor

A Figura 5.10 mostra a extensão das Zonas tipos A e B em um vão. Os valores do módulo de elasticidade do concreto na zona B são definidos aplicando um fator de penalização  $f_m$  obtido através da derivada numérica, por diferenças finitas, do diagrama *Momento x curvatura*.

Figura 5.10 - Zonas consideradas para calibração do modelo numérico: (a) Padrão de fissuração da longarina do vão central levantado em campo (face externa); (b) Modelo do vão central; (b) Modelo completo.

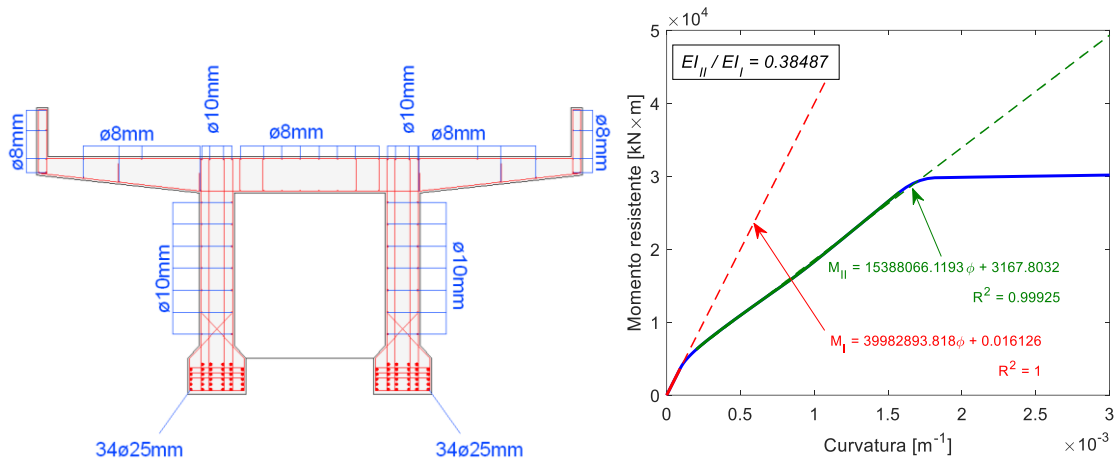


Fonte: (a) Bittencourt *et al.*, (2011); (b) Amaral *et al.*, (2020); (c) O Autor

Os valores adotados por Amaral *et al.*, (2020) na calibração do vão central da estrutura foram determinados considerando a variabilidade do módulo de elasticidade do concreto baseados nos valores obtidos nos ensaios de ultrassom realizados *in situ* e em corpos de prova por Bittencourt *et al.*, (2011). A fim de exemplificar o procedimento, a Figura 5.11 mostra este diagrama para a seção de referência obtido com base nos valores médios dos testes experimentais e o detalhamento da seção transversal da ponte.



Figura 5.11 – a) seção transversal da região central da ponte com armadura b) Diagrama momento-curvatura da seção, considerando o módulo de elasticidade tangente inicial médio para o concreto



Fonte: Amaral *et al.*, (2020)

A Tabela 5.4 apresenta os valores adotados para correção da rigidez à flexão segundo Amaral *et al.*, (2020). Verifica-se que, para o modelo E-II, além do valor médio da distribuição do módulo de elasticidade tangente inicial do concreto, também foram atribuídos em outras duas análises, respectivamente, um limite superior e um limite inferior correspondentes ao valor médio acrescido e reduzido de  $1.65 \times S_d$ , sendo  $S_d = 5.02 \text{ GPa}$  o desvio padrão obtido nos testes de ultrassom. Este procedimento garante que haja uma probabilidade em torno de 90% de que o valor real do módulo de elasticidade esteja compreendido entre esses limites, considerando valores normalmente distribuídos. Deste modo, foi adotado para o modelo numérico E-II, o módulo médio de 31.67 GPa para a zona A e 12.04 GPa para a zona B. Para o modelo que corresponde o limite superior, o módulo adotado foi de 39.93 GPa para a zona A e 13.11 GPa para a zona B. Para o limite inferior foi estabelecido um módulo de 23.40 GPa para a zona A e 10.40 GPa para a zona B. Para os modelos numéricos sem a correção da rigidez, foi adotado o módulo de elasticidade médio do concreto.

Tabela 5.4 - Valores adotados para o fator de penalização da rigidez à flexão

Modelo:		<i>E-I</i>		<i>E-I-SV</i>		<i>E-II</i>	
Zonas:		A	B	A	B	A	B
Média	$f_m$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.380
	<sup>(a)</sup> $E_c^{adotado}$ (GPa)	31.67	31.67	31.67	31.67	31.67	12.04
Limite inferior	$f_m$	-				1.00	0.445
	<sup>(b)</sup> $E_c^{adotado}$ (GPa)	-				23.40	10.40
Limite superior	$f_m$	-				1.00	0.328
	<sup>(c)</sup> $E_c^{adotado}$ (GPa)	-				39.93	13.11
$f_m$ = fator de modificação = $\frac{EI_{II}}{EI_I}$ = $\frac{\text{Rigidez à flexão no estágio II}}{\text{Rigidez à flexão no estágio I}}$							
<sup>(a)</sup> $E_c^{adotado} = f_m \times E_c^{médio}$							
<sup>(b)</sup> $E_c^{adotado} = f_m \times (E_c^{médio} - 1,65 \cdot S_d)$							
<sup>(c)</sup> $E_c^{adotado} = f_m \times (E_c^{médio} + 1,65 \cdot S_d)$							

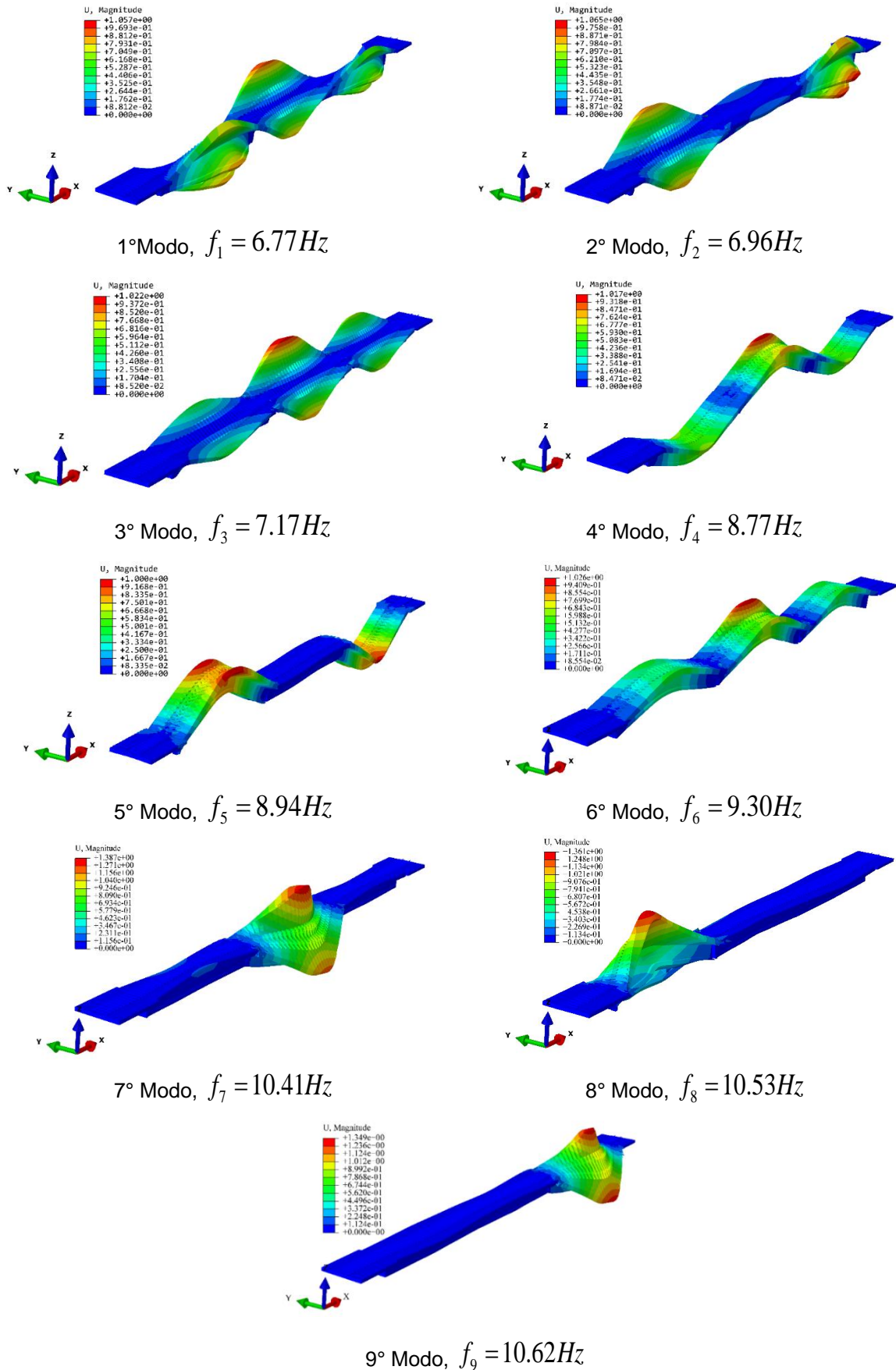
Fonte: Amaral *et al.*, (2020)

## 5.5 ANÁLISE MODAL

A fim de avaliar as propriedades dinâmicas da ponte, primeiramente fez-se uma análise modal para a extração dos modos com frequências de corte até 30Hz. Fez-se dois testes com o modelo *E-II* baseado no valor médio do módulo de elasticidade do concreto. Inicialmente, considerou-se a continuidade da via nas extremidades da ponte, na região dos encontros. No segundo teste, a extensão da via não foi considerada. As Figuras 5.12 e 5.13 mostram a comparação entre estes dois testes, em termos de frequências e modos naturais de vibração.

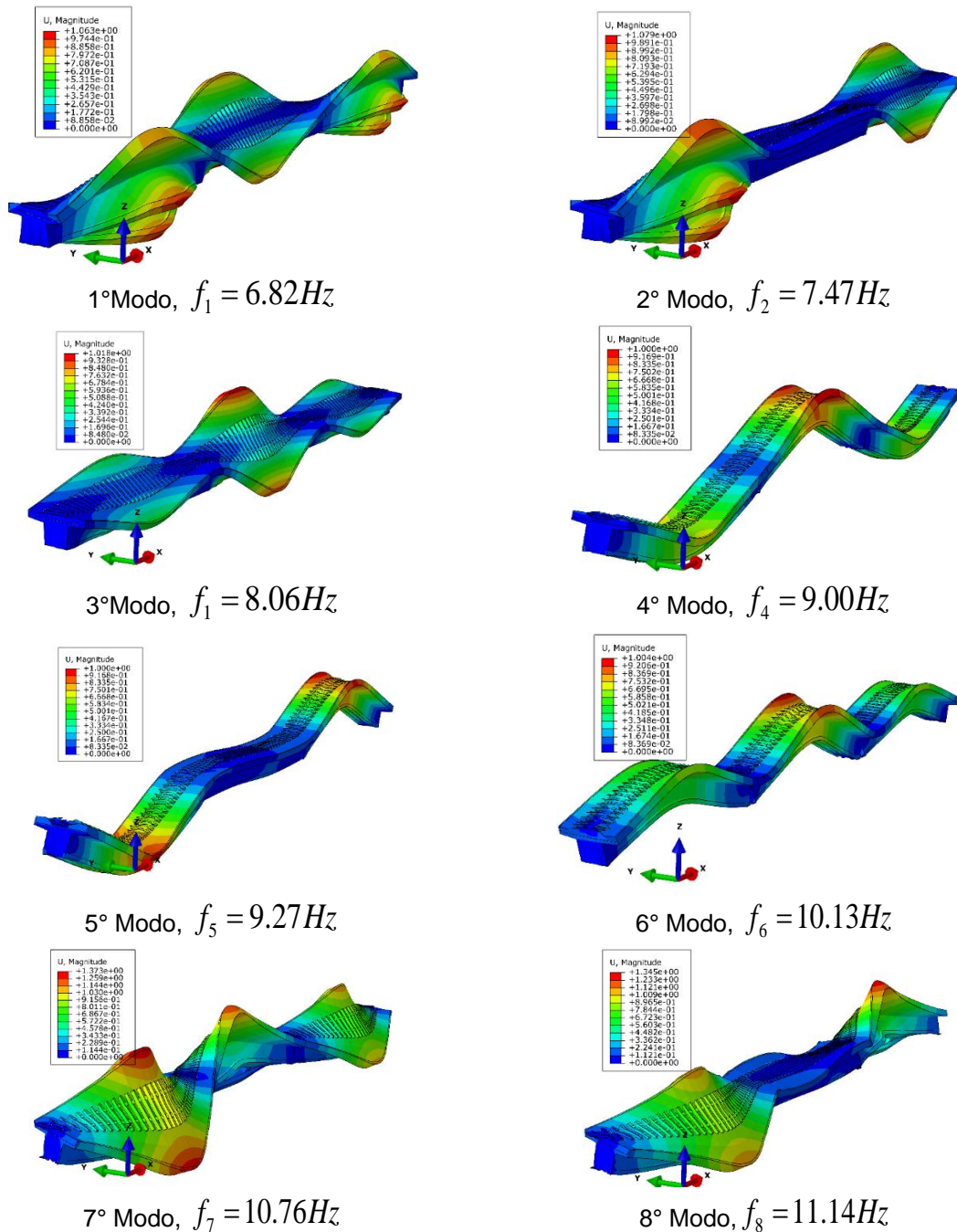
Os modos globais de vibração sem a consideração da continuidade da via apresentam um pequeno aumento em suas frequências naturais com relação ao modelo onde a via é estendida no final da ponte, quando a correspondência é feita para as formas semelhantes em ambos os modelos. As diferenças percebidas são maiores a partir do 7º modo de vibração, evidenciando que a extensão da via afeta mais os modos de ordem superior. No entanto, é importante destacar que a continuidade da via estabelece uma condição de contorno mais próxima da realidade.

Figura 5.12 - Modos globais de vibração e Frequências Naturais do modelo E-II



Fonte: O autor

Figura 5.13 - Modos globais de vibração e frequências do modelo E-II sem a consideração da continuidade da via nas regiões dos encontros



Fonte: O autor

Conforme descrito na seção 5.2, os acelerômetros usados no monitoramento das vibrações foram dispostos de forma a registrar apenas as acelerações verticais. Analisando os registros obtidos durante a fase de saída de cada trem da ponte, para o acelerômetro A1, a primeira frequência natural vertical oscilou entre 7.93 Hz e 8.46 Hz e para o acelerômetro A2 apresentou uma variação de 7.42Hz e 8.79 Hz. A

segunda frequência vertical registrada para o acelerômetro A1 variou de 10.7 Hz e 11.7 Hz e no intervalo de 8.01 Hz e 10.3 Hz para o acelerômetro A2 (BITTENCOURT *et al.*, 2011). Deve-se se ressaltar que não foi realizada uma análise modal experimental e os resultados supracitados foram obtidos apenas com base na análise do conteúdo espectral dos registros temporais de acelerações.

Com base na análise modal numérica do modelo E-II com via estendida e módulo de elasticidade médio do concreto, verifica-se que o primeiro modo de vibração é de torção e que o primeiro modo de flexão vertical tem frequência de 8.72 Hz, estando compatível com as observações experimentais, respeitando a faixa de variação. Nota-se também, que o segundo modo global de flexão vertical representa o sexto modo detectado numericamente, com frequência de 9.30 Hz. Tal valor pertence ao intervalo das frequências registradas no acelerômetro A2.

A partir da análise modal, pode-se estimar a velocidade de ressonância em aproximadamente 150 km/h, utilizando a equação (2.55) considerando o primeiro harmônico ( $k = 1$ ) e o primeiro espaçamento regular entre grupo eixos do vagão GDE,  $d' = \lambda_1 = 4.85$  m. Verifica-se também que, para a velocidade máxima operacional de 60 Km/h, a razão entre a primeira frequência de flexão vertical da ponte (8.72 Hz) e frequência externa do carregamento de 3.43 Hz, para este comprimento de onda de excitação, é de 2.54, estando de acordo com o critério estabelecido pela NBR 6118 (ABNT, 2014) para Estado Limite de Vibrações Excessivas em estruturas usuais de concreto armado, onde a referida razão deve ser  $>1.2$ .

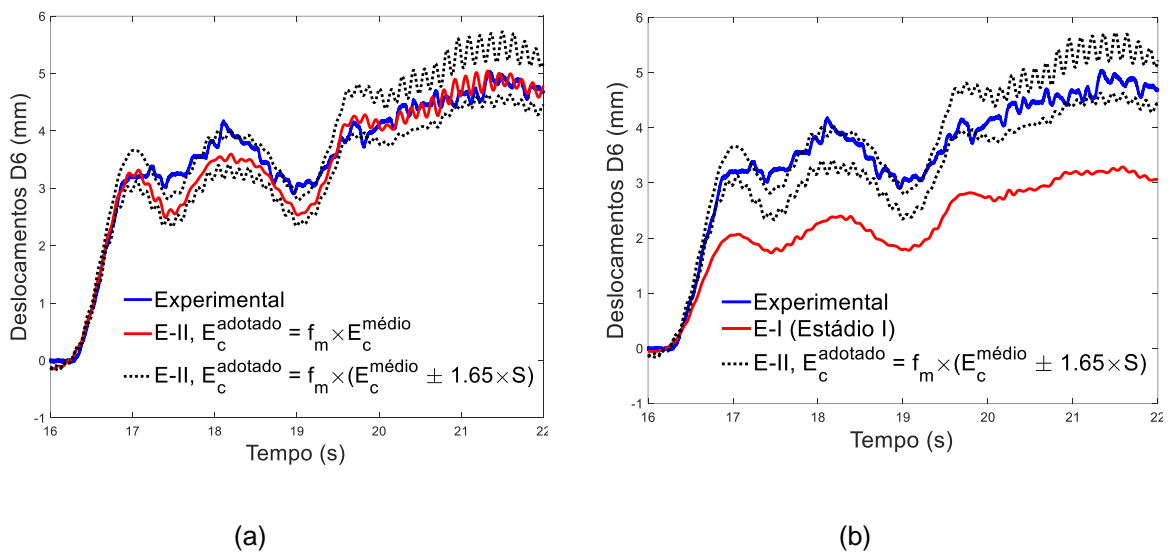
## 5.6 RESPOSTA DINÂMICA VIA SUPERPOSIÇÃO MODAL

A resposta dinâmica para a ponte foi determinada utilizando a metodologia numérica de carga móvel. As equações do movimento foram solucionadas por meio do Método de Superposição Modal com incremento de tempo  $\Delta t = 0.004$ s e uma frequência de corte de 30 Hz para solução das equações modais desacopladas. Foi utilizada uma taxa de amortecimento  $\xi = 1.62\%$  para todos os modos de vibração considerados na análise modal. O valor foi determinado de acordo com a equação (5.1), proposta pelo EN1991-2 (2003) para pontes de concreto armado com vãos  $L < 20$  m.

$$\xi = 1.5 + 0.07 \times (20 - L) \quad (5.1)$$

A Figura 5.14 mostra os deslocamentos verticais no meio do vão central no ponto onde foi instalado o transdutor *D6* referentes à simulação do trem de minério carregado a 56.77 km/h (com 2 locomotivas frontais + 6 vagões GDE) nos modelos *E-I* e *E-II*. Na figura, mostram-se os limites inferiores, superiores e a curva média de deslocamentos do modelo com correção da rigidez comparados aos deslocamentos obtidos via monitoramento e aos deslocamentos do modelo em estágio I (*E-I*).

Figura 5.14 - Deslocamentos verticais no ponto D6: (a) resultados experimentais e numéricos referentes ao Modelo E-II; (b) resultados dos modelos E-I, E-II e experimentais.



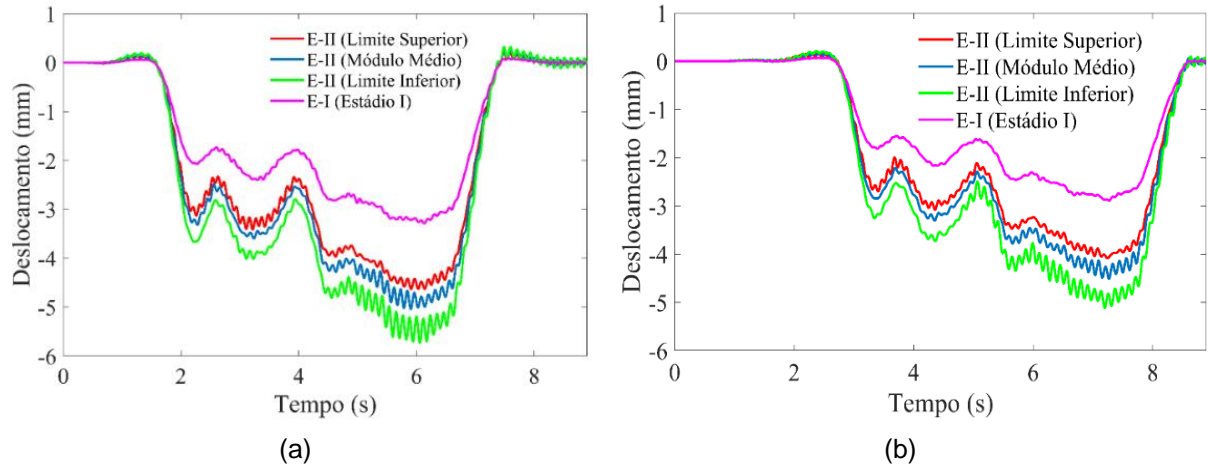
Fonte: O autor

Os resultados mostram uma boa concordância entre os modelos tridimensionais de elementos finitos e as medidas experimentais, em termos de deslocamentos. Fica evidente que a consideração da fissuração do concreto, por consequência, de sua perda de rigidez à flexão, é um parâmetro importante para a calibração da resposta dinâmica. Nota-se também que os resultados experimentais ficam entre os limites superiores e inferiores e superiores, quando a variabilidade do módulo de elasticidade do concreto é considerada. Isso demonstra que os módulos de elasticidades medidos por via experimental e adotados no modelo numérico geram resultados que representam com aceitável precisão a resposta real da estrutura.

A fim de avaliar a resposta dinâmica da ponte durante a passagem do trem de minério ao longo da estrutura, foram obtidos os deslocamentos verticais no modelo numérico para os transdutores D6 (deslocamento vertical no meio do vão central) e D5A (Deslocamento vertical no meio do vão da viga). Os resultados da simulação são

mostrados na Figura 5.15. Verifica-se que há uma diferença da ordem de 0.6 mm entre os deslocamentos verticais máximos simulados nesses pontos.

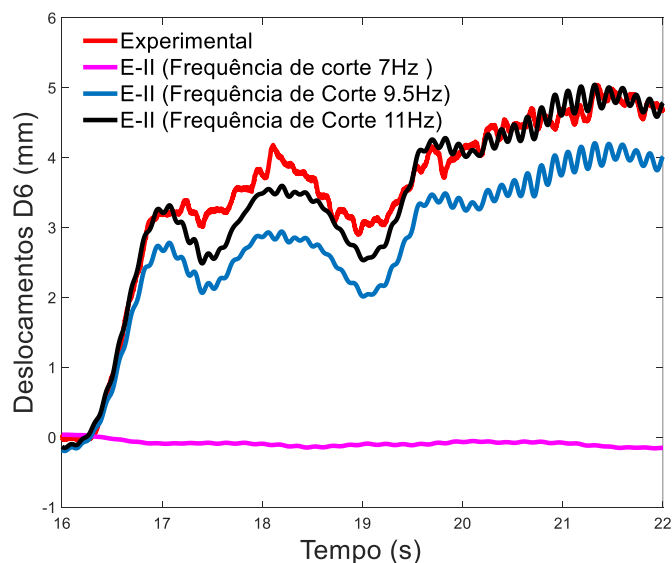
Figura 5.15 - Deslocamentos obtidos no modelo numérico nos pontos de instalação dos transdutores D6 e D5A: (a) ponto do Transdutor D6; (b) ponto do Transdutor D5A



Fonte: O autor

Os resultados acima mostram a influência da rigidez a flexão na resposta dinâmica para os diferentes módulos de elasticidade adotados nos modelos numéricos. Com finalidade de avaliar a contribuição dos modos de vibração da ponte para os deslocamentos, a resposta dinâmica via superposição modal do modelo *E-II*, com módulo tangente inicial médio do concreto, foi obtida considerando as contribuições do primeiro e do segundo modo de vibração da estrutura (frequência de corte de 7 Hz), dos seis primeiros modos (frequência de corte de 9 Hz) e dos nove primeiros modos (frequência de corte de 11 Hz), conforme a mostrado na Figura 5.16.

Figura 5.16 - Análise multimodal para os deslocamentos no ponto D6



Fonte: O autor

Os resultados mostram que os dois primeiros modos, ambos de torção, praticamente não contribuem na resposta dinâmica global da ponte. Com as superposições do terceiro, quarto, quinto e sexto modos, observa-se que os deslocamentos se aproximam mais dos resultados experimentais, dada a importância dos modos de flexão vertical. Com a consideração dos nove primeiros modos, a resposta apresenta uma boa concordância com os resultados experimentais. Verifica-se que os modos entre 11 Hz e 30 Hz têm contribuições praticamente desprezíveis, o que pode ser constatado ao serem comparados os resultados da Figura 5.16 (frequência de corte máxima de 11 Hz) e os resultados da Figura 5.14 (frequência de corte máxima de 30 Hz).

Também foi avaliada a influência da rigidez do aparelho de apoio na resposta dinâmica da ponte. Para o modelo *E-II*, o módulo de elasticidade equivalente do aparelho ( $E_b$ ) foi estimado a partir da norma alemã DIN (1984), tendo como base somente o comportamento axial do aparelho. Dessa forma, o comportamento tangencial do aparelho foi assumido como acoplado, o que equivale a considerar que o módulo de elasticidade transversal do conjunto ( $G$ ) é estimado simplesmente pela relação elástica  $G = E_b/[2(1+\nu)]$ , onde  $\nu \approx 0.49$  é o coeficiente de Poisson do *Neoprene*. Tal modelagem é uma aproximação que não considera o comportamento esperado do aparelho, onde a deformabilidade axial é desacoplada da tangencial. A primeira depende das restrições impostas pelo reforço de aço (placas de fretagem) e pelos componentes metálicos em contato com a almofada de *Neoprene* e a segunda depende somente das propriedades mecânicas do elastômero, o qual tem módulo transversal  $G$  da ordem de 1 MPa, em média. Dessa forma, a rigidez axial do aparelho é significativamente maior, e independente, comparada à rigidez tangencial. A fim de avaliar tal comportamento, uma nova série de simulações foram desenvolvidas considerando agora o módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) do *Neoprene* variando de 0.6 MPa a 1.3 MPa e o módulo de elasticidade longitudinal equivalente do aparelho de apoio calculado de acordo com as recomendações da AASHTO (2007), conforme as seguintes equações:

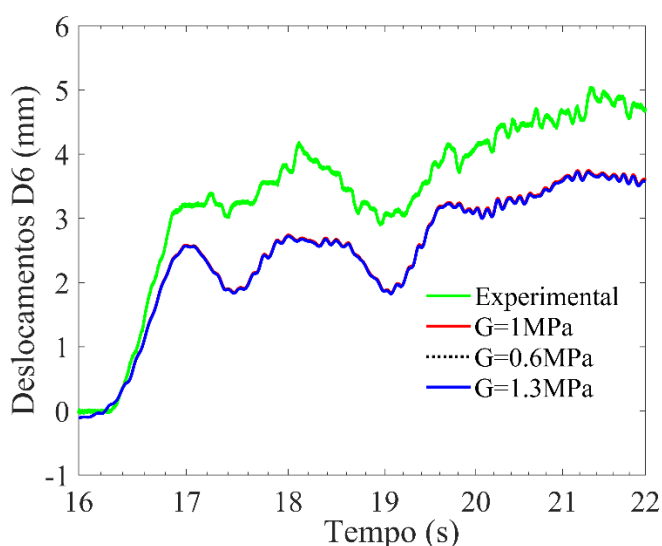
$$E_b = 6GS^2 \quad (5.2)$$

$$S = \frac{LW}{2h_{ri}(L+W)} \quad (5.3)$$



onde  $S$  é o fator de forma do aparelho,  $L$  dimensão longitudinal do aparelho de apoio na direção longitudinal em  $mm$ ,  $W$  é a dimensão na direção transversal em  $mm$  e  $h_{ri}$  é a espessura de cada sub-camada de *Neoprene*. O novo módulo de elasticidade axial equivalente foi estimado com base nos dados geométricos do aparelho de apoio documentados no relatório técnico desenvolvido por Bittencourt *et al.*, (2011). Os resultados, em termos de deslocamentos verticais no ponto D6, são mostrados na Figura 5.17.

Figura 5.17 - Deslocamentos simulados no ponto D6 para diferentes módulos transversais do aparelho de apoio



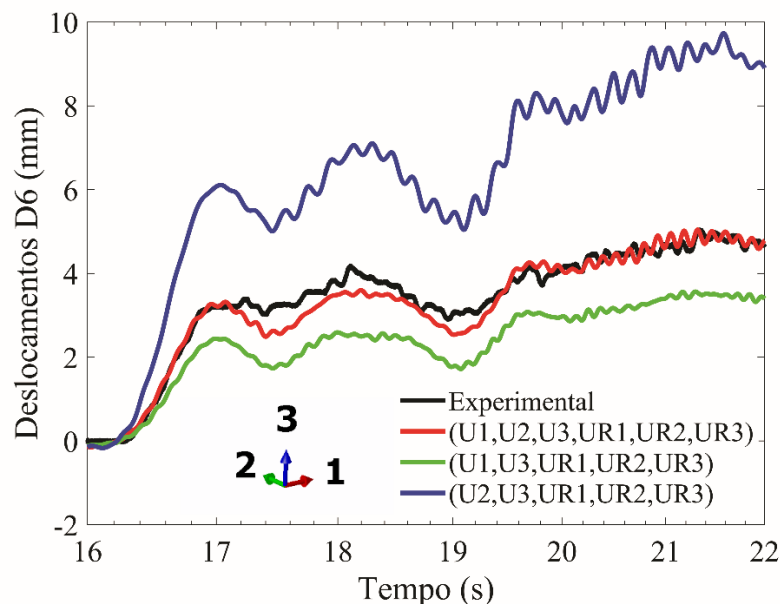
Fonte: O autor

Os resultados mostram que a resposta dinâmica é sensível ao módulo elástico transversal do *Neoprene*. Além disso, a considerável diferença entre a resposta do modelo, baseada em valores típicos de módulo transversal do elastômero, e os resultados experimentais, demonstra a existência de um mecanismo de impedimento que restringe parcialmente as deformações de cisalhamento do aparelho de apoio. Esta é uma constatação que reflete o comportamento medido experimentalmente, onde foram registrados deslocamentos longitudinais praticamente nulos na região do aparelho de apoio, conforme descrito em Bittencourt *et al.*, (2011).

A resposta dinâmica da ponte em função das condições de contorno impostas na base do aparelho de apoio também foi avaliada. Considerando o modelo numérico *E-II*, inicialmente foram restringidos todos os graus de liberdade de rotação e translação (restrição dos graus de liberdade  $UR1$ ,  $UR2$ ,  $UR3$ ,  $U1$ ,  $U2$  e  $U3$ ) na base do aparelho.

Posteriormente, foi liberada a translação na direção transversal à ponte (restrição dos graus de liberdade  $UR1, UR2, UR3, U1$  e  $U3$ ). Por fim, liberou-se a translação na direção longitudinal (restrição dos graus de liberdade  $UR1, UR2, UR3, U2$  e  $U3$ ). A resposta dinâmica em função das condições de contorno da base do aparelho de apoio é mostrada na Figura 5.18, abaixo. Os resultados mostram que o deslocamento vertical no meio do vão central aumenta significativamente quando é liberada a restrição de translação na direção longitudinal à ponte e para condição de esgastamento na base do aparelho o modelo converge bem com a resposta experimental.

Figura 5.18 - Deslocamentos para diferentes condições de contorno na base do aparelho de apoio.  
(Nota: entre parêntesis são mostrados os graus de liberdade restringidos, sendo 1 a direção longitudinal, 2 a direção transversal à ponte e 3 a direção vertical)



Fonte: O autor

## 6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Este estudo apresentou e descreveu os parâmetros importantes que devem ser considerados em uma análise dinâmica de pontes ferroviárias. Foram estudadas metodologias analíticas simplificadas baseadas em cargas móveis para análise dinâmica de pontes isostáticas, onde trafegam trens de alta velocidade. Também foram investigados modelos numéricos via elementos finitos e analíticos considerando o problema de interação veículo-ponte no plano (2D), e um modelo tridimensional (3D) de elementos finitos de uma ponte ferroviária de concreto armado tomada como estudo de caso. A análise do modelo da ponte foi realizada através da metodologia de cargas móveis, via superposição modal, e os resultados das simulações foram validados com base em dados experimentais.

As metodologias analíticas e simplificadas (DER) e (LIR) descreveram bem o comportamento dinâmico para trens de alta velocidade para o exemplo estudado. Dessa forma, tais metodologias podem ser aplicadas para fazer um pré-dimensionamento de um modelo mais complexo de uma ponte e mostrar possíveis velocidades de ressonância do veículo, as quais devem ser evitadas.

Os modelos numéricos interação no plano mostraram que a consideração da massa do veículo é importante para avaliar as acelerações críticas nas estruturas, as quais são bem sensíveis no problema de interação veículo-ponte comparadas às resultantes do modelo de cargas móveis.

Na modelagem do problema de interação veículo-ponte acoplado no plano, verificou-se que os algoritmos de contato disponível no programa de elementos finitos não tiveram muita influência nas respostas dinâmicas simuladas. Notou-se também que as respostas dinâmicas para deslocamentos e acelerações no problema de interação, quando modelada a ponte com elementos de viga ou com elementos sólidos, apresentam boa concordância nos resultados.

O modelo tridimensional em elementos finitos da ponte tomada como estudo de caso, mostrou que o procedimento de correção de sua rigidez devido à fissuração do concreto gerou resultados que representam razoavelmente bem o comportamento real da estrutura quando a variabilidade do módulo do concreto é considerada, mostrando que a fissuração do concreto é uma variável importante para a calibração

e validação do modelo numérico. A análise multimodal mostrou que os dois primeiros modos de torção não têm importância relevante na resposta dinâmica para os deslocamentos, e sim os modos seguintes, predominantemente o quarto e sexto modos de flexão vertical. Por fim, uma série de simulações mostrou que a rigidez longitudinal do aparelho de apoio, associada às deformações de cisalhamento, também é um parâmetro importante para calibração do modelo da ponte, uma vez que a resposta dinâmica se mostrou significativamente sensível às condições de suporte.

A fim de melhor investigar o problema da interação veículo-estrutura e as respostas dinâmicas da ponte tomada como estudo de caso, sugere-se:

- Implementar a metodologia desacoplada de interação veículo-ponte, testá-la com base em exemplos com soluções conhecidas na literatura e aplicá-la ao estudo da ponte sobre o Rio Suaçuí;
- Incluir soluções analíticas baseadas no Método da Linha de Influência Virtual (LIV) e compará-las com as soluções analíticas já abordadas neste trabalho;
- Implementar uma campanha completa de monitoramento da ponte sobre o Rio Suaçuí, baseada em Análise Modal Operacional (OMA) para levantamento experimental dos modos de vibração, frequências naturais e taxas de amortecimento;
- Implementação de uma metodologia automatizada para calibração de modelo numérico via otimização e aplicá-la à calibração da ponte sobre o Rio Suaçuí, baseada nas respostas das análises modais numérica e experimental.
- Comparar as respostas do modelo de cargas móveis e do modelo com interação da ponte sobre o Rio Suaçuí, em termos de deslocamentos e também de acelerações no domínio do tempo e da frequência;
- Melhorar a instrumentação dos aparelhos de apoio, acrescentando mais pontos de monitoramento, a fim de medir eventuais restrições aos deslocamentos relativos, especialmente aqueles na direção longitudinal à ponte;

## REFERÊNCIAS

ADAM, Constantine Y.; MILNER, Henry R. Wood-based prefabricated composite-acting bridge deck. **Journal of Bridge Engineering**, v. 17, n. 2, p. 363-370, 2012.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR. 6118: Projeto de estruturas de concreto—Procedimento. **Rio de Janeiro**, 2014.

AASHTO. (2007). **LRFD bridge design specifications**, 4th Ed., Washington, DC.

AMERICAN RAILWAY ENGINEERING AND MAINTENANCE-OF-WAY ASSOCIATION. **Manual for railway engineering**. Washington: AREMA, 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7188: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas: Procedimento. **Rio de Janeiro**, 2013

AMARAL, M. A.; TEIXEIRA, R. M.; VALVERDES, L. C. M.; BITTENCOURT, T. N.; FUTAIM, M. M. Simulação numérica do comportamento de uma ponte ferroviária de concreto armado com consideração de fissuração por penalização da rigidez à flexão. 62º **Congresso Brasileiro do Concreto CBC2020**. Florianópolis -SC

AZIMI, H.; GALAL, K.; PEKAU, O. A. A modified numerical VBI element for vehicles with constant velocity including road irregularities. **Engineering Structures**, v. 33, n. 7, p. 2212-2220, 2011.

BARBERO, J. D. **Dinámica de puentes de ferrocarril para alta velocidad: métodos de cálculo y estudio de la resonancia**. 2001. Tese (Doutorado em Caminos, Canales y Puertos) – Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 2001.

BIGGS, J. M. **Introduction to structural dynamics**. Michigan: McGraw-Hill College, 1964.

BIONDI, B.; MUSCOLINO, G.; SOFI, A. A substructure approach for the dynamic analysis of train-track-bridge system. **Computers & Structures**, v. 83, n. 28-30, p. 2271-2281. nov. 2005.

BITTENCOURT, T. N.; COLOMBO, A. B.; CONCEIÇÃO NETO, A. P.; TEIXEIRA, R. M.; MACHADO, E. **Análise dos resultados do Monitoramento da Ponte de Concreto Armado sobre o Rio Suaçuí**: relatório. São Paulo: USP, 2011.

CALÇADA, R. A. B. **Avaliação experimental e numérica de efeitos dinâmicos de cargas de tráfego em pontes rodoviárias**. 2001. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 2001.

CARDOSO, M. T. S. A.; LIMA, M. C. V. **Determinação numérica de rigidezes de almofada de apoio fretado em análise tridimensional no ANSYS**. (UFPR, Ed.). Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia. **Anais...**Curitiba: 2017

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures**: theory and applications to earthquake engineering. Boston: Prentice-Hall, 2001.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, Y. **Dynamique des Structures**. Berkeley: Computers & Structures, 2003.

COSTA, C.; RIBEIRO, D.; JORGE, P.; SILVA, R.; ARÊDE, A.; CALÇADA, R. Calibration of the numerical model of a stone masonry railway bridge based on experimentally identified modal parameters. **Engineering Structures**, v. 123, p. 354-371, 2016

DASSAULT SYSTÈMES. **Abaqus 6.14** : analysis user's manual. Providence, RI, USA, 2016

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. **DIN 4141-1**: structural bearings - General Design Rules. Berlim, 1984.

EUROPEAN RAIL RESEARCH INSTITUTE. **ERRI D214/RP9**: railway bridges for speeds> 200 km/h final report, 2001. Utrecht, Netherlands, 2001.

EUROPEAN RAIL RESEARCH INSTITUTE. **ERRI.D214/RP6**: railway bridges for speeds>200km/h: calculations for bridges with simply-supported beams during the passage of na train. Utrecht, Netherlands, 2000.

EUROPEAN STANDARD. **EN1991-2**: Eurocode 1: actions on structures: part 2: traffic loads on bridges. Brussels, 2003.

FERNANDES, M. A. M. **Comportamento dinâmico de pontes com tabuleiro pré-fabricado em vias de alta velocidade**. 2010.

FRÝBA, L. A rough assessment of railway bridges for high speed trains. **Engineering Structures**, v. 23, n. 5, p. 548-556, 2001.

FRÝBA, L. **Vibration of solids and structures under moving loads**. Netherland: Springer Science & Business Média, 1972.

HUGHES, T. **The finite element method**: linear statics and dynamic finite element analysis. New York: Prentice Hall International: Englewood Cliffs, 1987.

LIU, K.; DE ROECK, G.; LOMBAERT, G. The effect of dynamic train–bridge interaction on the bridge response during a train passage. **Journal of Sound and Vibration**, v. 325, n. 1-2, p. 240-251, 2009.

MAJKA, M.; HARTNETT, M. Dynamic response of bridges to moving trains: a study on effects of random track irregularities and bridge skewness. **Computers and Structures**, v. 89, p. 1233-1252, 2009.

MALVEIRO, J. RIBEIRO, D.; CALÇADA, R.; DELGADO, R.. Updating and validation of the dynamic model of a railway viaduct with precast deck. **Structure and Infrastructure Engineering**, v. 10, n. 11, p. 1484-1509, 2014

MALVEIRO, J.; RIBEIRO, D.; SOUSA, C.; CALÇADA, R. Model updating of a dynamic model of a composite steel-concrete railway viaduct based on experimental tests. **Engineering Structures**, v. 164, p. 40-52, 2018.

TICONA MELO, L. R. . **Estudo de efeitos dinâmicos de pontes ferroviárias considerando interação veículo-estrutura**. 2017. Tese (Doutorado em Ciências).- Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

TICONA MELO, L. R..; BITTENCOURT, T. N. Análise Dinâmica de Pontes Isostáticos para Trens de Alta Velocidade Considerando a Interação Veículo-Estrutura. In: IBERAIN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 35., 2014, Fortaleza. **Anais [...]**. Fortaleza: ABMEC, 2014. p. 23-26.

TICONA MELO, L. R. T.; BITTENCOURT, T. N. Avaliação da resposta dinâmica de pontes iostáticos para trens de alta velocidade. In: IBERAIN LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 34., 2013, Pirenópolis. **Anais [...]** Pirenópolis: ABMEC, 2013. p. 10-13.

TICONA MELO, L. R. T.; RIBEIRO, D. CALÇADA, R.; BITTENCOURT, T. N. Validation of a vertical train-track-bridge dynamic interaction model based on limited experimental data. **Structure and Infrastructure Engineering**, v. 16, n. 1, p. 181-201, 2020.

TICONA MELO, L. R. T; BITTENCOURT, T. N.; RIBEIRO, D.; CALÇADA; R. Dynamic response of a railway bridge to heavy axle-load trains considering vehicle-bridge interaction. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 18, n. 1, p. 1850010, 2018.

MATHWORKS. **MATLAB 7.6.0 – getting started guide**. Natick, USA, 2011

PAULO, E. G.; PINHO, M. S.; LIMA, R. C.; GREGORI, M. L.; OGASAWARA, T. Compósitos de ferrita de Ni-Zn com policloropreno para utilização como materiais absorvedores de radar para a banda S. **Cerâmica**, v. 50, n. 314, p. 161–165, 2005.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de madeira**: dimensionamento segundo na Norma Brasileira NBR 7190/97 e critérios das Normas Norte-Americanas NDS e Europeia EUROCODE 5. 6. ed. Rio de Janeiro: Escola Politécnica, 2003

PINHO, M. S.; LIMA, R. C.; PERES, A. C. C.; NUNES, R. C. R. Propriedades Mecânicas e Absorvedoras de Microondas de Compósitos de Negro de Fumo com Policloropreno. **Revista Matéria**, v. 10, n. 4, p. 543–548, 2005.

RIBEIRO, D. R. F. **Comportamento dinâmico de pontes sob ação de tráfego ferroviário a alta velocidade**. 2004. Dissertação (Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 2004.

RIBEIRO, D. R. F. **Efeitos dinâmicos induzidos por tráfego em pontes ferroviárias: modelação numérica, calibração e validação experimental**. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 2012.

RIBEIRO, D.; CALÇADA, R.; DELGADO, R.; BREHM, M.; ZABEL, V.. Finite element model updating of a bowstring-arch railway bridge based on experimental modal parameters. **Engineering Structures**, v. 40, p. 413–435, jul. 2012.

TEIXEIRA, R. M. **Bridge Assistant Code**. São Paulo, 2014. (programa de computador sem registro).

TEIXEIRA, R. M. **Metodologias para modelagem e análise da fadiga em ligações rebitadas com aplicação em pontes metálicas ferroviárias**. Universidade de São Paulo, 2015.

XIA, H.; ZHANG, N.; GUO, W. **Dynamic Interaction of Train-Bridge Systems in High-Speed Railways**. Suíça: Springer, 2018.

XIA, H.; ZHANG, N. Dynamic analysis of railway bridge under high-speed trains. **Computers & Structures**, v. 83, n. 23-24, p. 1891-1901, 2005.

YANG, Y. B.; CHANG, K. C. Extraction of bridge frequencies from the dynamic response of a passing vehicle enhanced by the EMD technique. **Journal of sound and vibration**, [s. l.], v. 322, n. 4-5, p. 718-739, 2009.

YANG, Y. B.; LIN, C. W. Vehicle–bridge interaction dynamics and potential applications. **Journal of sound and vibration**, v. 284, n. 1-2, p. 205-226, 2005.

YANG, Y. B.; LIN, C. W.; YAU, J. D. Extracting bridge frequencies from the dynamic response of a passing vehicle. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], v. 272, n. 3-5, p. 471-493, 2004.

YANG, Y. B.; YAU, J. D. Vehicle-bridge interaction element for dynamic analysis. **Journal of Structural Engineering**, v. 123, n. 11, p. 1512-1518, 1997.

YANG, Y. B.; YAU, J. D.; WU, Y, S. **Vehicle-bridge interaction dynamics: with applications to high-speed railways**. London: World Scientific, 2004.

YAZDANI, Nur; EDDY, Scott; CAI, Chun S. Effect of bearing pads on precast prestressed concrete bridges. **Journal of Bridge Engineering**, v. 5, n. 3, p. 224-232, 2000.



